

Esta publicación está destinada a facilitar la labor de los alumnos de la asignatura "Mecánica de los medios continuos" que el Profesor D. Luis Lozano Calvo explica en 4º curso de la especialidad GEO-FÍSICA, Sección Ciencias Físicas, de la Universidad Complutense.



NOCIONES DE

NEOLOGIA

E. ALARCON

A MUÑO.

En la especialidad "Geofísica" que se cursa en la Facultad de Ciencias, sección de Físicas, se destina un cuatrimestre al estudio de los problemas de la Mecánica de los sólidos. Tras un primer análisis de la Elasticidad tradicional, se pasa revista a los fenómenos en que intervienen las características plásticas y el tiempo.

Las páginas que siguen tienen por finalidad facilitar la labor de los alumnos que deben estudiar estas materias, aliviándoles de la obligada consulta de textos foráneos.

El lector experto no encontrará, pues, ninguna aportación original y al, en cambio, numerosas omisiones obligadas por el destino de lo escrito y la brevedad del período docente. En particular ha sido especialmente dolorosa la supresión de los estupendos teoremas de COLONETTI, de las doctrinas de VOLTERRA, de los fenómenos de envejecimiento, de los problemas dinámicos, etc., etc., etc.

Realmente nos limitamos a apuntar los temas, y a comunicar el lenguaje necesario para que el lector pueda continuar en textos mejores el análisis del apasionante campo, aquí apenas desvelado.

Respecto a la bibliografía, se han procurado recoger las pocas publicaciones en castellano que existen, así como las que han servido para redactar los apuntes y aquellas que se estiman imprescindibles para estudios posteriores. Estas últimas han sido señaladas con un asterisco.

La publicación ha sido posible gracias al apoyo, orientación y confianza recibidos del Catedrático de la asignatura, D. Luis Lozano Calvo, y de los compañeros del curso 1972 - 73, en especial Sor Felisa Formoso, y J. L. López Jurado, que han tomado nota puntual de las explicaciones de clase.

Quisiera agradecer también la colaboración de D. Carlos G^a. de Valdeavellano y D. Miguel A. Hacar, que me han permitido utilizar algunas obras de su propiedad y me han estimulado con sus sugerencias.

Gracias, finalmente, a C. de los Ríos y M. Yáñez por haber mecanografiado - primorosamente - el manuscrito en un tiempo record, a los delineantes L. Albadea y R. Lorrio que han preparado las magníficas figuras del mismo, y a la imprenta EDIX por su interés.

Madrid, Diciembre de 1972.

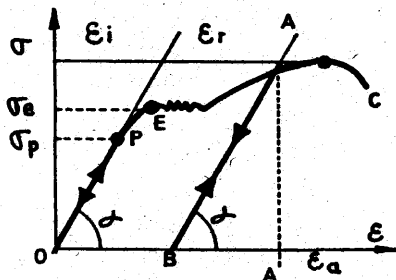
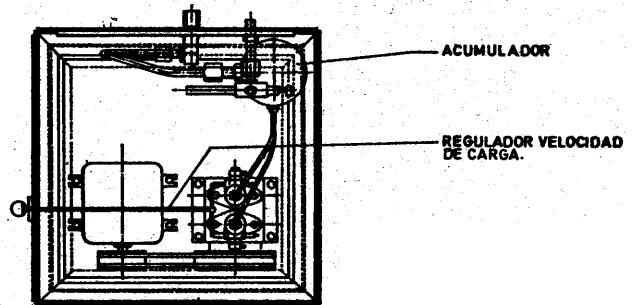
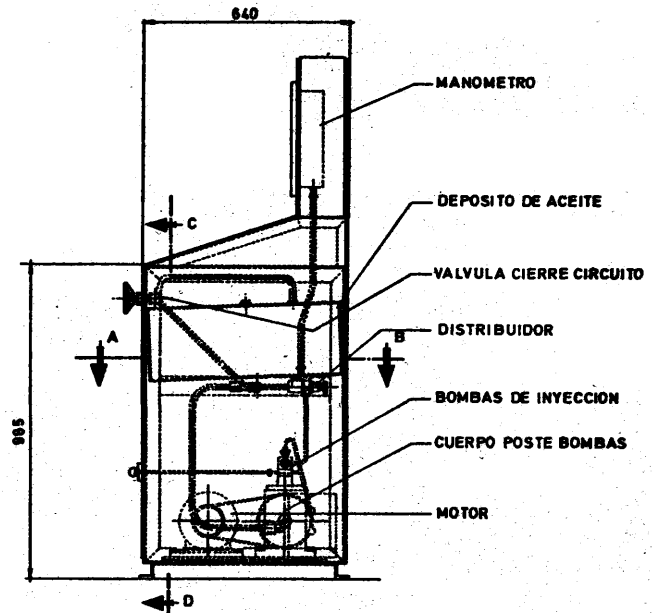
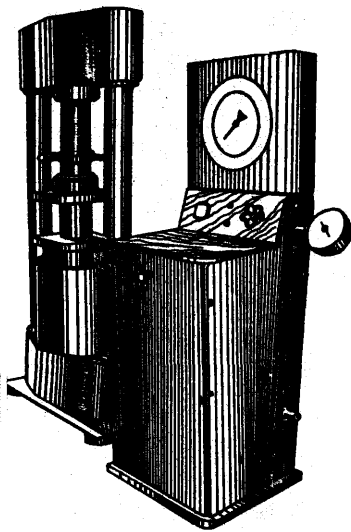
1 CONSIDERACIONES GENERALES

1.1. - EL ENSAYO DE TRACCION

El método más extendido para la determinación del módulo de YOUNG es la construcción del diagrama tensión-deformación del material en estudio. Por ser sumamente instructivo vamos a analizar lo que sucede cuando, en una prensa de ensayo, colocamos una probeta de acero. Si N es el esfuerzo aplicado y A_0 la sección inicial de la probeta, la tensión que manejaremos es $\sigma = N/A_0$. Respecto a la deformación unitaria $\epsilon = L/L_0$ se establece con los alargamientos que se miden y la longitud inicial entre dos marcas suficientemente lejanas de las mordazas para evitar su influencia.

Durante la etapa hookeana el gráfico resulta ser lineal hasta un valor σ_p límite de proporcionalidad, a partir del que la rama se incurva. En el intervalo comprendido entre $\sigma = 0$ y $\sigma = \sigma_e$ cualquier descarga de la máquina se produce por la línea inicial, cosa que no sucede cuando se sobrepasa σ_e ; por ello a esta tensión se la denomina límite elástico y se dice que entre 0 y σ_e el cuerpo está en fase elástica, (esto es, recupera la forma inicial al descargarse).

Sobrepasado σ_e se produce una serie de fluctuaciones que revelan una adaptación de la estructura del material y, de nuevo, una rama curva. Pero ahora algo ha cambiado;



$$\sigma = \frac{N}{A_0}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = E$$

Consideraciones generales

al descargar la probeta no se vuelve por el camino de llegada o diagrama noval, sino que la descarga se realiza por una línea AB prácticamente paralela a la rama hookeana que se incurva ligeramente en A. Se dice que el cuerpo se encuentra en fase plástica.

El resultado es que pese a haber descargado la probeta permanece una deformación OB a la que llamaremos ϵ_r deformación remanente.

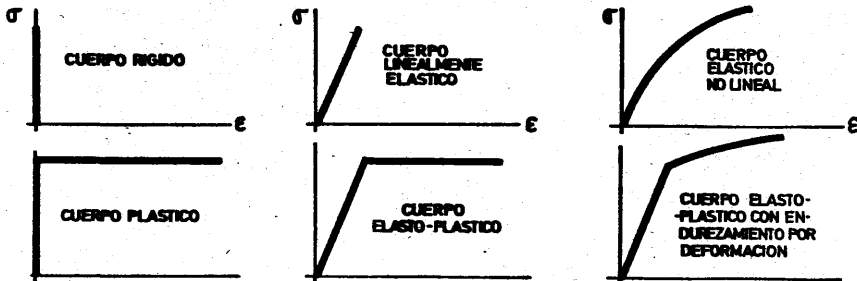
La deformación total de cualquier punto A de la zona plástica se compone, pues, de dos sumandos: una deformación que se recupera ϵ_e ó deformación elástica y la citada ϵ_r .

$$\epsilon_A = OA' = OB + BA = \epsilon_r + \epsilon_e$$

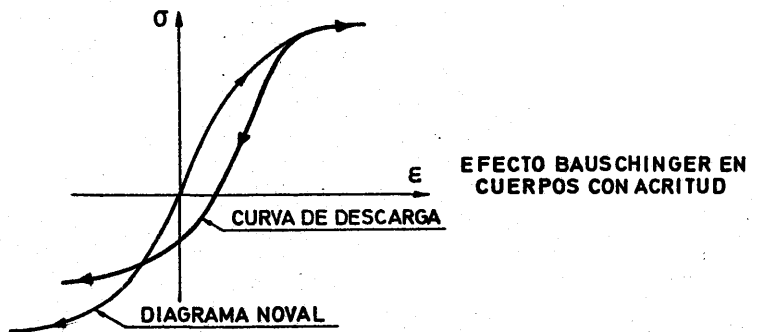
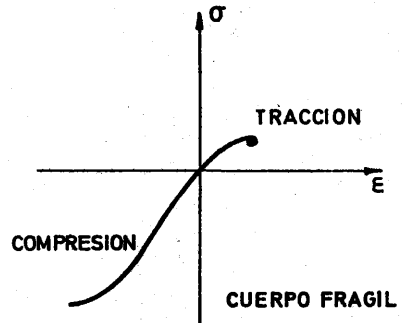
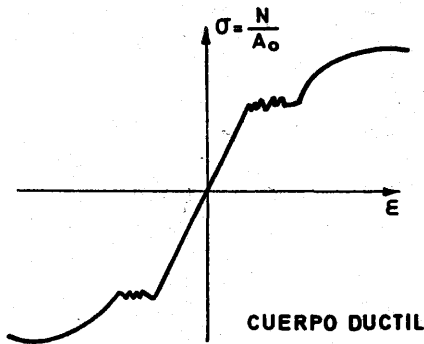
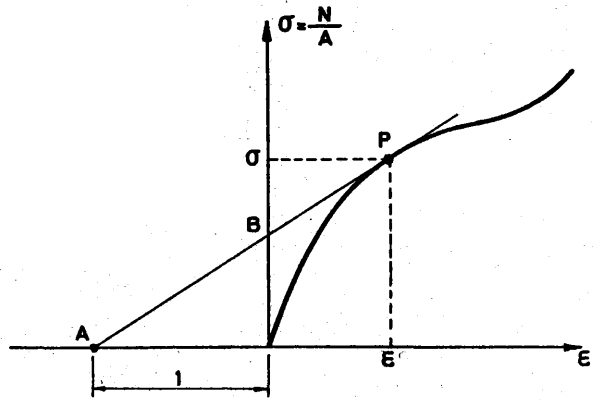
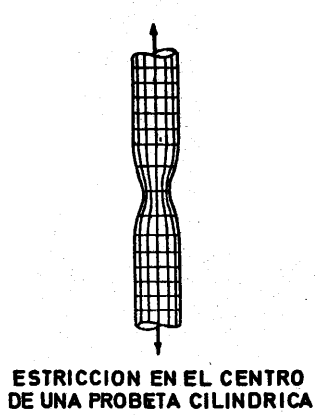
Si se repite desde B la carga de la probeta, se recorre la rama BA y se empalma, hasta C, con el diagrama noval.

En los cuerpos con acritud o endurecimiento por deformación plástica esto implica un desplazamiento hacia arriba del diagrama. Es decir, por un estirado previo se consigue aumentar el valor de σ_e al esfuerzo en cuestión (a costa, naturalmente, de una reducción en la distancia a la rotura) pero simultáneamente, el valor de la σ_e de signo contrario disminuye. Es el llamado efecto Rauschinger. El valor de σ_e depende entonces de la historia de la probeta, y complica bastante el desarrollo de los cálculos.

En otros cuerpos el resultado puede ser distinto, pero en líneas generales el comportamiento es análogo. Con objeto de crear un lenguaje se han ideado una serie de diagramas que representarían el funcionamiento de cuerpos ideales.



Consideraciones generales



Consideraciones generales

Algunos de ellos se representan en la Fig. 2.

Al llegar al punto C se produce la rotura de la probeta. Previamente se observa la aparición de un estrechamiento o estricción que puede interpretarse como un fenómeno de inestabilidad.

En efecto, el proceso es prácticamente isocórico; por ello

$$AL = A (L_0 + \Delta L) = A_0 L_0 = \text{cte}$$

Si se produce una variación $d\varepsilon$, al derivar la expresión anterior se obtiene

$$A \frac{d(\Delta L)}{d\varepsilon} + (L_0 + \Delta L) \frac{dA}{d\varepsilon} = 0$$

$$\frac{dA}{d\varepsilon} = \frac{-A}{L_0 + \Delta L} \frac{d(\Delta L)}{d\varepsilon}$$

$$\text{Como } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} ; \quad d\varepsilon = \frac{d(\Delta L)}{L_0} \quad \text{y} \quad \frac{dA}{d\varepsilon} = \frac{-AL_0}{L_0 + \Delta L} = \frac{-A}{1 + \varepsilon}$$

La fuerza que actúa en cada instante es, por definición,
 $N = A \sigma$

$$\frac{dN}{d\varepsilon} = A \frac{d\sigma}{d\varepsilon} + \sigma \frac{dA}{d\varepsilon} = A \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} - \frac{\sigma}{1 + \varepsilon} \right)$$

Consideraciones generales

Si $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} > \frac{\sigma}{1+\varepsilon}$ todo un incremento de ε está provocado por el correspondiente dN . La situación es estable.

Si $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} < \frac{\sigma}{1+\varepsilon}$ se puede producir un incremento $d\varepsilon$ aunque disminuya dN . La situación es inestable.

y si por cualquier causa (un defecto local, por ejemplo), una sección de la barra disminuye de sección más rápidamente que las vecinas, continuará el proceso indefinidamente provocando la estricción.

Si se dibuja el diagrama real $\sigma - \varepsilon$, con $\sigma = N/A$, $(d\sigma/d\varepsilon)$ es la pendiente de la tangente a la misma.

Trazando desde el punto A (-1;0) la tangente al diagrama se obtiene P, punto crítico que separa las zonas de estabilidad.

La ordenada en el origen de la tangente en el punto crítico representa la máxima resistencia a tracción del material definida según Fig. 1.

$$\text{Como } OB = \frac{\sigma}{1+\varepsilon} = \frac{N}{A(1+\varepsilon)} = \frac{N}{A(1+\frac{\Delta L}{L_0})} = \frac{N}{\frac{A}{L_0}(L_0+\Delta L)}$$

$$OB = \frac{N}{A_0}$$

El criterio para definir ε es el de CAUCHY. Pero si a partir de un L_0 se produce un ΔL y $\varepsilon = \Delta L/L_0$, la nueva longitud es $L_0 + \Delta L$ y frente a un nuevo ΔL , ε debería ser, $\varepsilon = \Delta L/(L_0 + \Delta L)$ en lugar de $\Delta L/L_0$. Si desarrollamos en serie

Consideraciones generales

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0} \right)^{-1} = \frac{\Delta L}{L_0} \left(1 - \frac{\Delta L}{L_0} + \dots \right) = \epsilon^c - (\epsilon^c)^2 + \dots$$

Si ϵ^c es muy pequeño podemos quedarnos con sólo el primer término sin grave error. Pero si las deformaciones son finitas, no infinitesimales, HENCKY opera de la siguiente manera: el alargamiento del trozo de longitud x es dx/x . Si la longitud inicial es l_0 y la final l , el alargamiento total es

$$\epsilon^H = \int_{l_0}^l \frac{dx}{x} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln (1 + \epsilon^c) = \epsilon^c - \frac{1}{2} \epsilon_c^2 + \dots$$

que coincide con el anterior para deformaciones pequeñas. Si hay dos procesos de carga

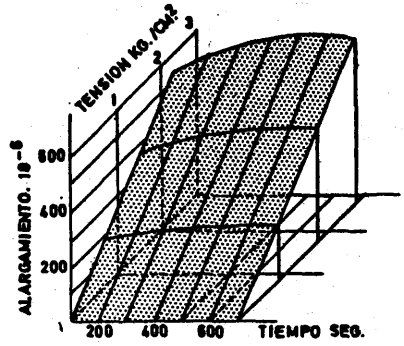
$$\epsilon^H = \ln \frac{l_2}{l_0} = \ln \left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{l_1}{l_0} \right) = \ln \frac{l_2}{l_1} + \ln \frac{l_1}{l_0} = \epsilon_2^H + \epsilon_1^H$$

las deformaciones de HENCKY forman grupo. A veces se llaman deformaciones racionales.

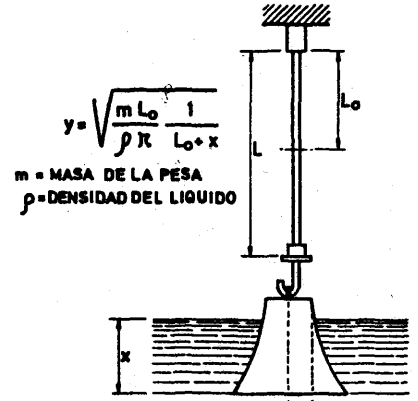
Añadiremos finalmente que el diagrama completo debe reflejar también el comportamiento frente a las compresiones.

En el acero la simetría es perfecta. Pero no sucede lo mismo con las rocas o el hormigón, por ejemplo, en los que la resistencia a tracción es muy inferior a la resistencia a compresión.

Consideraciones generales



SUPERFICIE DE FLUENCIA
DEL ALKATENE (SEGUN ROCHA)



APARATO DE ANDRADE

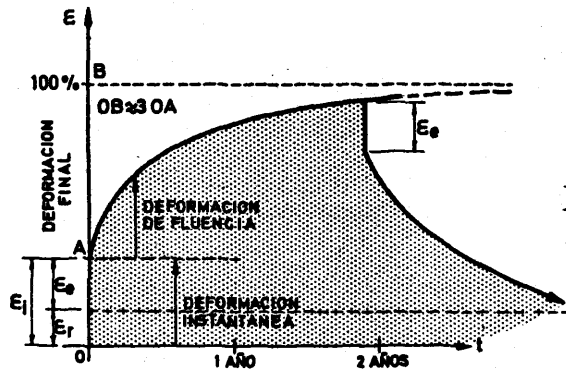
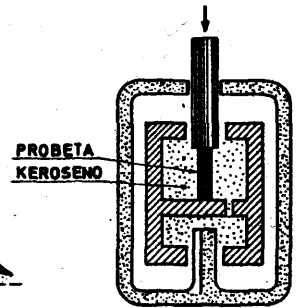


DIAGRAMA DE FLUENCIA DEL HORMIGON



APARATO DE GRIGGS

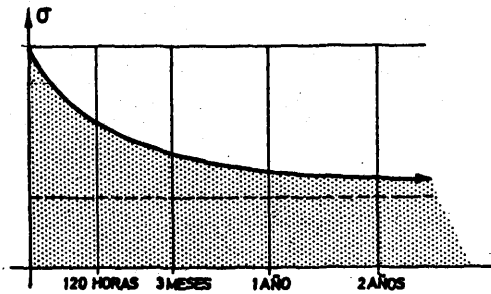
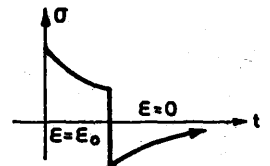


DIAGRAMA DE RELAJACION



Consideraciones generales

1.2. - RELAJACION Y FLUENCIA

En el apartado anterior hemos expuesto los resultados que se obtienen con ensayos rápidos en los que el tiempo no influye.

Al hacerlo intervenir la representación adecuada sería tridimensional (σ, ϵ, t). Para simplificar la representación y aislar los conceptos fundamentales vamos a mantener constante alguno de los valores σ ó ϵ con lo que recaeremos en un diagrama bidimensional.

En primer lugar vamos a imaginar un ensayo de relajación que corresponde a longitud constante. Supongamos una serie de hilos de acero de las mismas características tendidos entre dos placas rígidas con diferentes tensiones $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n$. Si $\sigma_1 = \sigma_{rotura}$, se producirá el colapso instantáneo del alambre. Los otros irán rompiendo en instantes sucesivos $t_2 < t_3 < \dots < t_n$.

El resultado es la curva de la figura.

El fenómeno concreto que acabamos de narrar recibe el nombre de cansancio y, en general, relajación, presentándose en todos los materiales. Si se produce en t_n una descarga hasta un alargamiento nulo por aplicación de una tensión de signo contrario el proceso se invierte. En las barras de nuestro ensayo concreto aparece una asíntota en σ^* que representa el límite mínimo de pérdida de resistencia por efecto del tiempo.

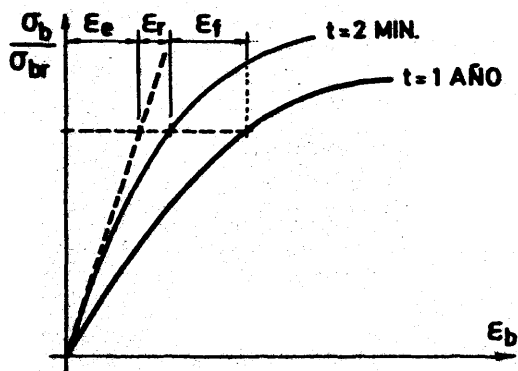
Un ensayo de fluencia es más fácil de imaginar. En este caso el proceso es a tensión constante. Como el área varía es preciso imaginar dispositivos especiales. Muy ingenioso es el aparato de ANDRADE¹, pensado para tracción constante. A medida que una pesa se hunde por el alargamiento de la barra, el empuje hidrodinámico disminuye su acción y la tracción permanece constante.

Análogo es el aparato de GRIGGS² en que la presión permanece constante gracias al movimiento de unos émbolos.

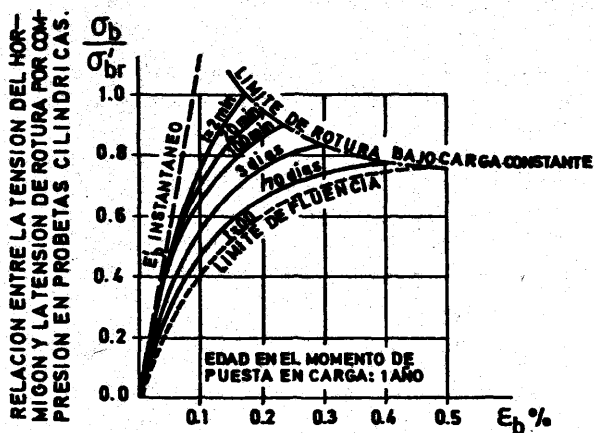
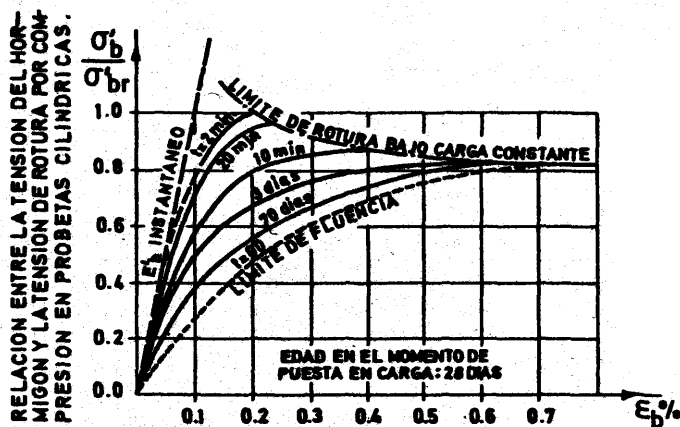
Si se trabaja a carga constante el diagrama no es exacto pero el fenómeno es el mismo.

1) The viscons flow in metals. Proc. Roy. Soc. A 84 (1911)

2) Creep of rocks. Journ. of. Geology. 1939



ESQUEMA DE REPRESENTACION DE LAS DEFORMACIONES



CURVAS DE LA INSTRUCCION ESPAÑOLA DE HORMIGON

Consideraciones generales

Imaginemos una probeta de hormigón entre los platos de una prensa con carga constante. Si medimos los acortamientos la gráfica que se obtiene es la de la figura. La asíntota corresponde a 3 veces la deformación instantánea. Si en un instante T se produce la descarga se recupera inmediatamente la deformación elástica y luego se encuentra una rama que tiende al valor ϵ_r de la deformación remanente. Los cuerpos para los que se presenta asíntota se llaman de elasticidad retardada. En general puede no existir.

Cuando se habla, por tanto, de deformación es preciso recordar que existen en cualquier instante, tres componentes:

- la deformación elástica ϵ_e
 - la deformación remanente ϵ_r
 - la deformación de fluencia ϵ_f
- ϵ_i
deformación instan-
tánea.

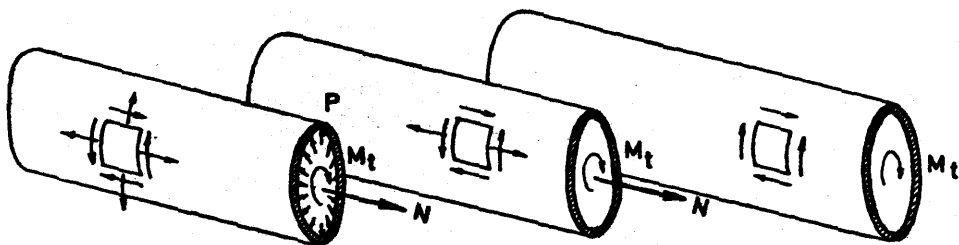
$$\epsilon = (\epsilon_e + \epsilon_r) + \epsilon_f = \epsilon_i + \epsilon_f$$

Por ello, un diagrama σ - ϵ completo debe estar compuesto por varias curvas que serían las líneas de nivel para tiempos determinados.

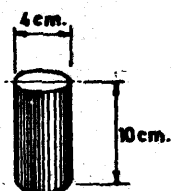
Como ejemplo incluimos las curvas que para el caso del hormigón propone la norma española.

La presencia del tiempo complica así los diagramas de los cuerpos ideales que presentamos antes completándolos en su comportamiento viscoso.

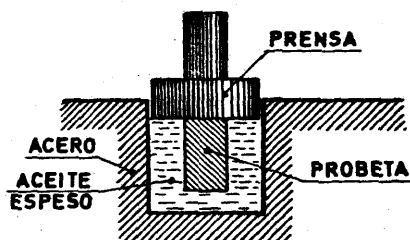
Se hablará así de cuerpos elásticos, elastoplásticos, viscoelásticos, viscoelastoplásticos, etc.



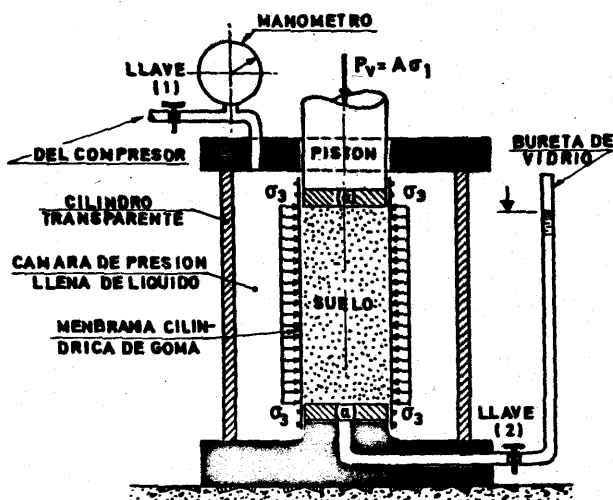
ENSAYOS DE TUBOS .ESTADOS DE SOLICITACION VARIOS



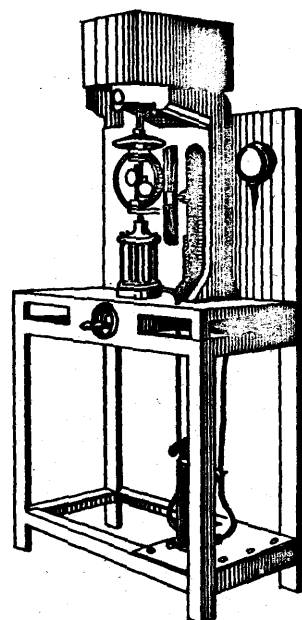
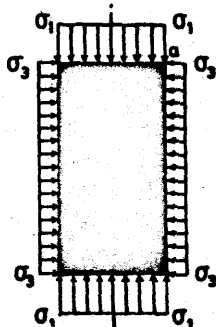
PROBETAS DE MARMOL (KARMAN)



ENSAYO DE KARMAN



ESQUEMA DE APARATO DE COMPRESION TRIAXIAL



APARATO DE COMPRESION TRIAXIAL

Consideraciones generales

1.3. - CRITERIOS DE RESISTENCIA EQUIVALENTE

Si se desea conocer la resistencia de un material a una determinada sollicitación será preciso ensayar el elemento de volumen con ella. En determinados casos se han realizado ensayos planos con tubos y ensayos triaxiales.

Por ejemplo, mediante la aplicación de un par torsor a un tubo delgado se puede ensayar el comportamiento frente a la tensión tangencial. Si además se añade una tracción se consigue un estado plano bastante general, que se mejora si se añade presión interna (Lode).

En la Universidad de HARVARD, el premio nobel P.W. BRIDGMAN. (También BECKER (1916) realizó experiencias análogas) demostró experimentalmente que un estado hidrostático de tensiones no afecta a la fluencia del material.

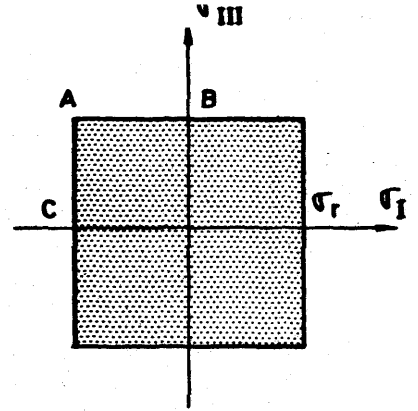
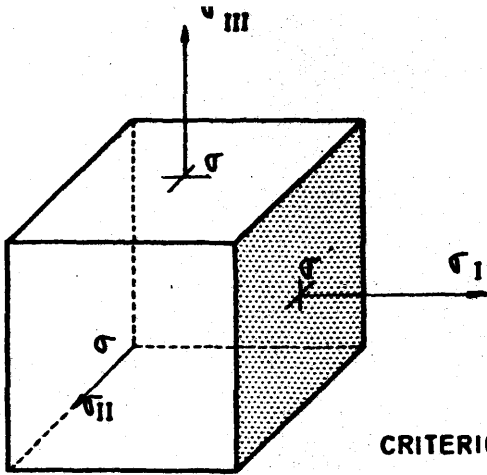
Un ejemplo práctico lo presentan las rocas a gran profundidad que, pese a las grandes presiones, a que se encuentran sometidas, no fluyen. El test de KARMAN (1912) se puede realizar introduciendo en un bloque rígido (vg. de acero) un cilindro del material a ensayar.

Si la cavidad se rellena con aceite la probeta ve constreñida su dilatación transversal y se encuentra sometida a un estado complejo.

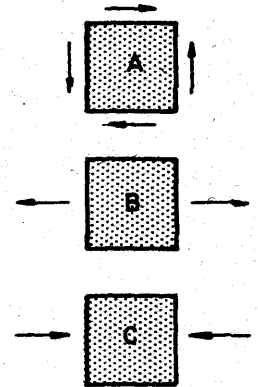
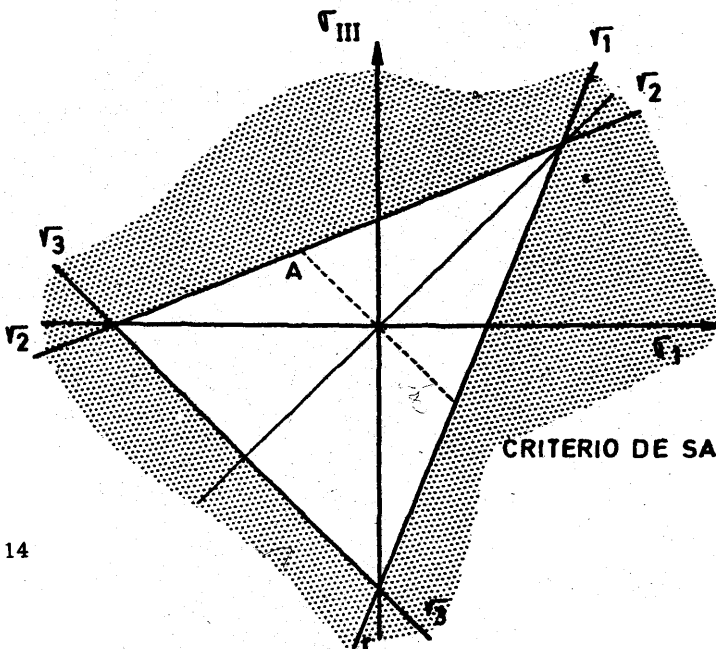
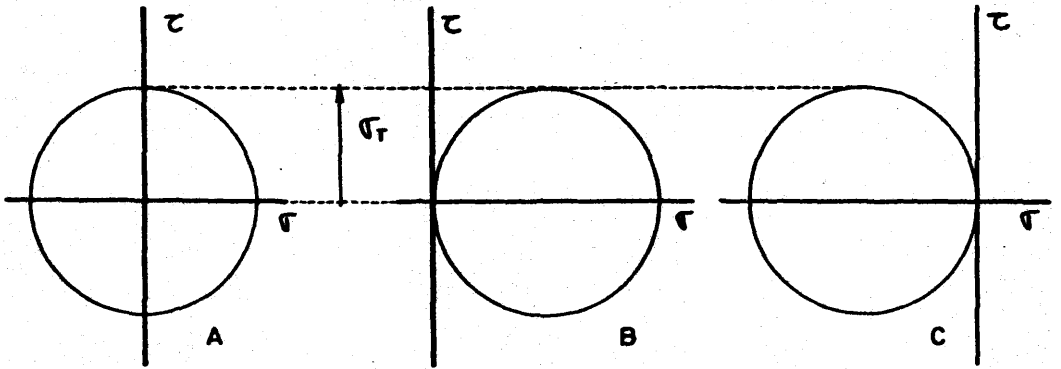
En el estudio de las propiedades mecánicas de los suelos se utiliza el ensayo triaxial. El suelo se coloca en una membrana sobre la que se ejerce una presión regulable σ_3 . El suelo se comprime mediante un pistón que provoca la presión σ_1 , que aumenta progresivamente hasta producir la rotura.

La llave 2 permite drenar la probeta para que no se falseen los resultados.

Un ensayo de tritración es difícil de realizar. JOFFE, sin embargo, ha conseguido una prueba muy ingeniosa con una esfera de mármol. Enfríandola hasta la temperatura del aire líquido lentamente consiguió dejarla sin tensiones. Al exponerla bruscamente a la temperatura ambiente



CRITERIO DE RANKINE Y LAME



CRITERIO DE SAINT-VENANT Y PONCELET

Consideraciones generales

La dilatación de las capas exteriores coloca al centro en tritracción. Mediante los cálculos adecuados consiguió al centro en tritracción. Mediante los cálculos adecuados consiguió probar que el centro se encontraba sometido a valores superiores a los de rotura en el ensayo de tracción.

Todos los experimentos citados son costosos y difíciles. Por ello, sería del máximo interés conseguir criterios que estableciesen la situación monoaxil correspondiente a cualquier sollicitación. Con ello se podría predecir la rotura o la fluencia con base en el ensayo de tracción que es standard, barato y rápido.

Estos criterios se conocen con el nombre de hipótesis de resistencia y vamos a exponerlos pese a que algunos sólo tienen interés histórico.

El primero en el tiempo es el de la máxima tensión normal (RANKINE¹ y LAME²). Se limita a suponer que la rotura se produce cuando la mayor tensión alcanza el valor correspondiente al ensayo de tracción. En un diagrama $(\sigma_I; \sigma_{II}; \sigma_{III})$ las condiciones son

$$|\sigma_I| \leq \sigma_r; |\sigma_{II}| \leq \sigma_r; |\sigma_{III}| \leq \sigma_r$$

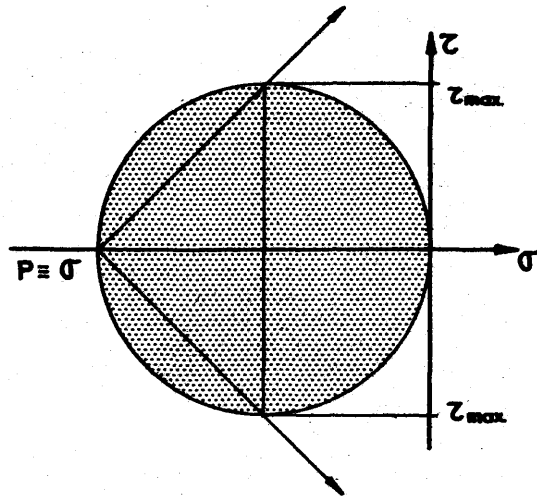
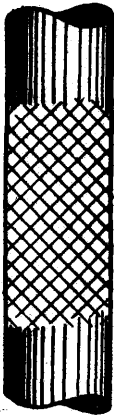
Para ver su falsedad basta comprobar con el círculo de MOHR para el estado A. Si fuera cierto un cuerpo sería capaz de alcanzar una $\tau_{m\acute{a}x} = \sigma_r$. Pero la experiencia demuestra que no es así; en el acero vg. $\tau_{m\acute{a}x} \approx 0.6\sigma_r$. Por otro lado no parece lógica la igualdad de resultados para tres situaciones tan diferentes como las A, B y C.

El segundo criterio es el de la máxima deformación (SAINT-VENANT³ y PONCELET⁴). Se admite que se produce la plastificación cuando la máxima deformación principal es igual a la del ensayo de tracción.

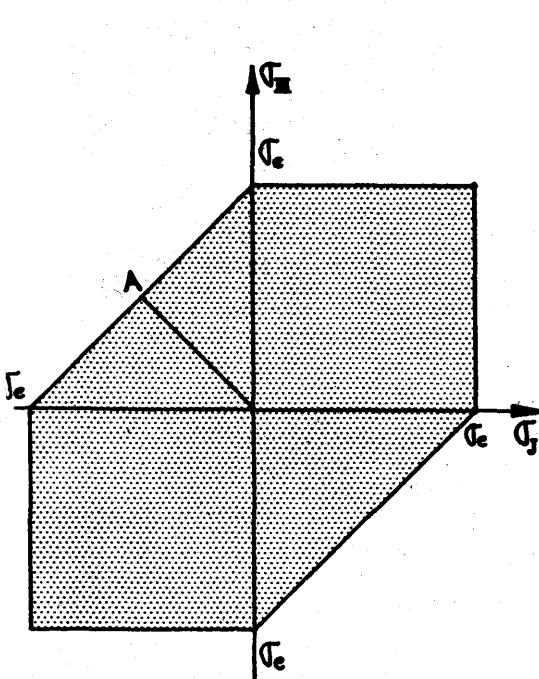
En éste $\epsilon = \sigma_e / E$

- 1) Manual of applied mechanics. 1858
- 2) Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. 1852.
- 3) Comptes Rendus 70 (1870) y Journal de Mathématiques 16 (1871)
- 4) Introduction à la Mécanique Industrielle, physique et expérimentale. (1839).

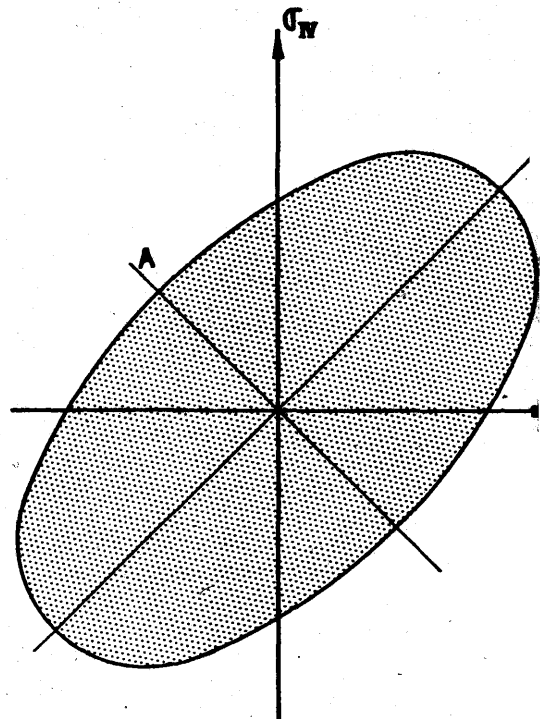
Consideraciones generales



LINEAS LÜDERS - HARTMAN EN EL ENSAYO DE TRACCION



CRITERIO DE TRESCA Y GUEST



CRITERIO DE BELTRAMI Y HAIG

Consideraciones generales

En un estado plano, con $\sigma_{\text{I}} = 0$

$$\epsilon_{\text{I}} = \frac{1}{E}(\sigma_{\text{I}} - \nu\sigma_{\text{III}}) \leq \sigma_e$$

$$\epsilon_{\text{I}} = \frac{\nu}{E}(\sigma_{\text{I}} + \sigma_{\text{III}}) \leq \sigma_e$$

$$\epsilon_{\text{III}} = \frac{1}{E}(\sigma_{\text{III}} - \nu\sigma_{\text{I}}) \leq \sigma_e$$

Es decir, en el diagrama $(\sigma_{\text{I}}, \sigma_{\text{III}})$ las

$$r_1: \sigma_{\text{I}} - \nu\sigma_{\text{III}} - \sigma_e \leq 0$$

$$r_2: \sigma_{\text{III}} - \nu\sigma_{\text{I}} - \sigma_e \leq 0$$

$$r_3: -\nu\sigma_{\text{I}} - \nu\sigma_{\text{III}} - \sigma_e \leq 0$$

Nuevamente, en el punto A, con $\sigma_{\text{I}} = -\sigma_{\text{III}}$ se obtiene

$$\sigma_{\text{I}} = \frac{\sigma_e}{1+\nu} = \tau_{\text{máx}} \quad (\text{Si } \nu = 1/4, \sigma_{\text{I}} = 0.8\sigma_e)$$

En el ensayo de tracción aparecen, en el momento de la fluencia, unas líneas a 45° que reflejan la reordenación del material. Estas líneas de LUEDER o HATMANN, han hecho pensar en la posibilidad de rotura por cortante. Es decir, que lo que gobierne la fluencia sea la $\tau_{\text{máx}}$. El criterio de la máxima tensión tangencial (TRESCA¹, GUEST²), establece pues

$$\left| \frac{\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}}}{2} \right| \leq \frac{\sigma_e}{2}; \quad \left| \frac{\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}}}{2} \right| \leq \frac{\sigma_e}{2}; \quad \left| \frac{\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}}}{2} \right| \leq \frac{\sigma_e}{2}$$

que es un cilindro cuya traza en el plano $(\sigma_{\text{I}}, \sigma_{\text{III}})$ es el exágono que se indica.

En el punto A obtenemos

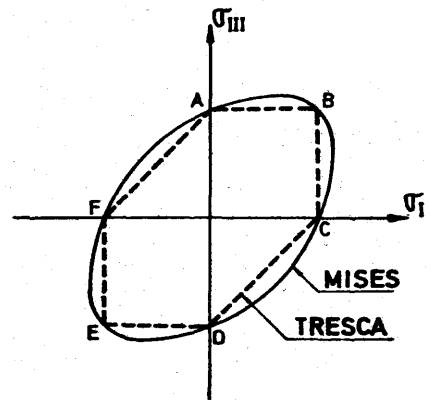
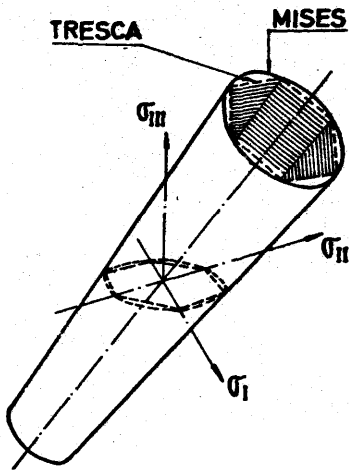
$$\tau_{\text{máx}} = 0.5\sigma_e$$

Además no queda limitado el estado de tracción triple.

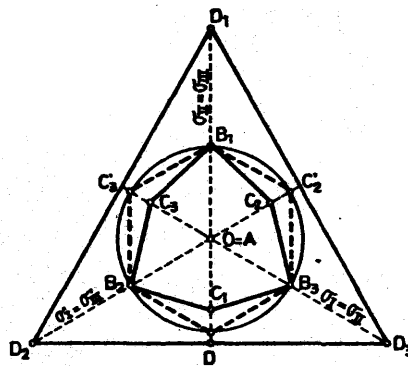
Aprovechando el estudio energético se puede pensar que la fluencia se produce cuando la energía elástica sea la exhibida por el material en el ensayo de tracción y en el momento de fluencia. Es el criterio de BELTRAMI³ y HAIG⁴.

- 1) Memoires par divers savants; tt 18 (1868) y 20 (1872)
- 2) On the strength of ductile materials under combined stress. Phil. Mag. (5) 50; (1900).
- 3) Math. Annalen (1903) P. 94.
- 4) Brit. Assoc. Rep. Pag. 486 (1919). Pag. 324 (1921) y Pag. 358 (1923).

Consideraciones generales



COMPARACION DE LOS CRITERIOS DE LA MAXIMA TENSION CORTANTE Y LA ENERGIA DE DISTORSION



PROYECCION AXONOMETRICA DE LOS CRITERIOS DE

COULOMB (Linea llena)
TRESCA (Linea de trazos)
MISES (Circulo)

Consideraciones generales

En el apéndice III

$$U = \frac{1}{2E} [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)]$$

En el ensayo de tracción

$$U = \frac{\sigma_e^2}{2E}$$

El criterio es pues

elipsoide cuya traza en el plano $(\sigma_x; \sigma_z)$ es la elipse

$$\sigma_x^2 + \sigma_z^2 + 2\nu\sigma_x\sigma_z \leq \sigma_e^2$$

Si se hace

$$\sigma_z = 0 \quad \sigma_x \leq \sigma_e$$

se obtiene que la τ_{\max} en tracción sencilla debe ser inferior a la mitad de σ_e lo cual se separa de la realidad.

Queda además en contra la limitación del estado hidrostático.

Finalmente si, de acuerdo con los ensayos de BRIDGMANN, pensamos que la componente esférica no influye en la fluencia la condición es la igualación de la energía de distorsión; es el criterio de VON MISES¹ y HECKY²

$$U = \frac{1}{12G} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] \leq \frac{\sigma_e^2}{2G}$$

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x} \leq \sigma_e$$

ecuación de un cilindro, de eje la directriz del triedro, que envuelve al cilindro de TRESCA.

En el caso de no referirse a los ejes principales

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_e$$

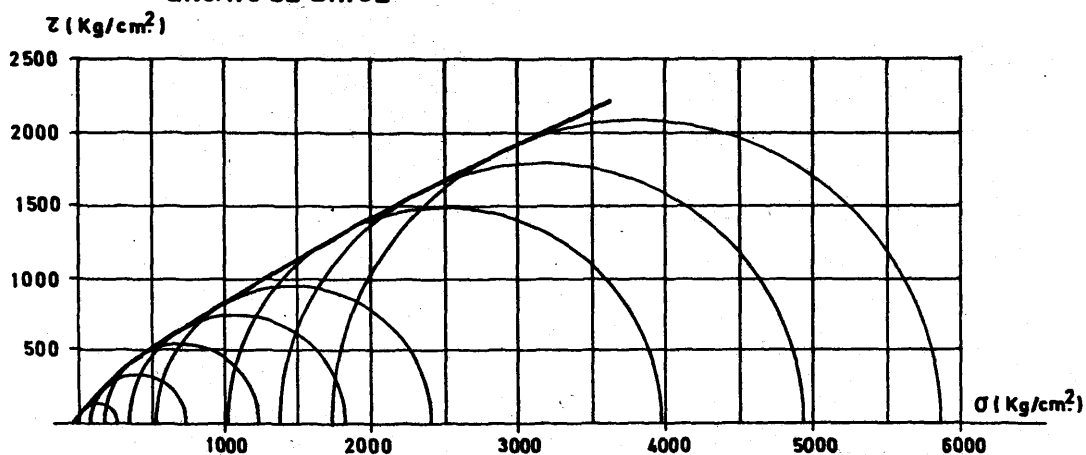
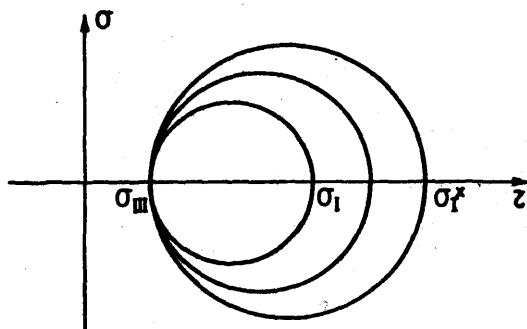
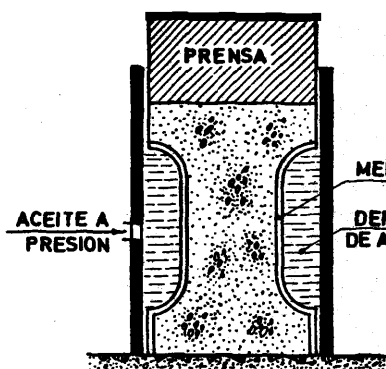
Para esfuerzo cortante puro

$$\tau/\sqrt{3} \leq \sigma_e; \quad \tau_{\max} \approx 0.6 \sigma_e$$

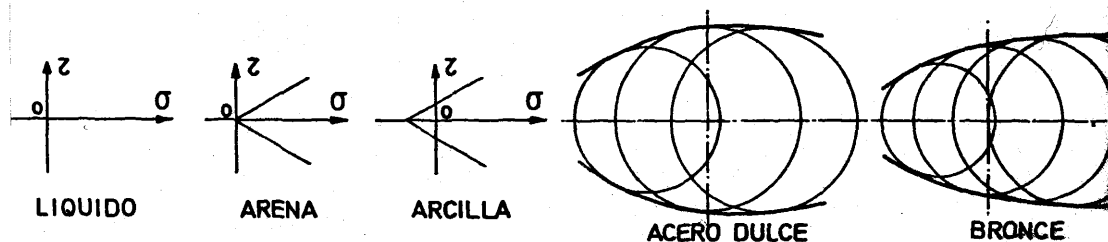
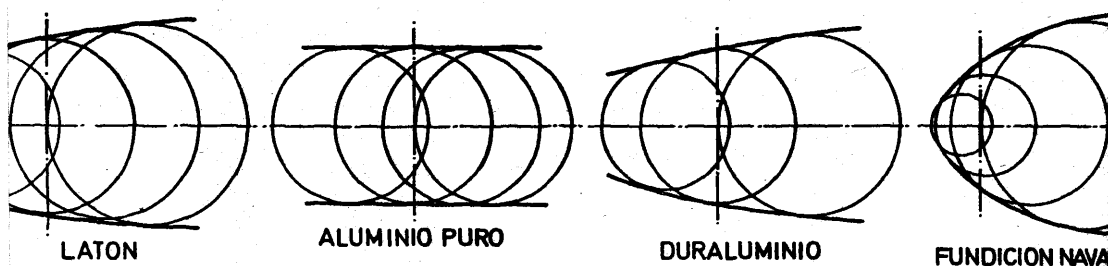
Este criterio tampoco limita el estado de tracción isotropa. HUBER ha superado esta dificultad adoptando el criterio de BELTRAMI siempre que se tenga $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 > \sigma_e$

1) Mechanik der festen körper im plastisch-deformablen zustand. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math-physik. Klasse (1913).

2) Ver Nadai: Plasticity (1931).



CURVA INTRINSECA DEL HORMIGON



CURVAS INTRINSECAS

Consideraciones generales

1.4. CRITERIOS FENOMENOLOGICOS

Imaginemos el ensayo triaxial de un suelo, o el análisis de un metal por el método de BRICE-CAQUOT (1928)

En el diagrama (σ, τ) de MOHR, y como por simetría $\sigma_I = \sigma_{III}$ solo se representa un círculo. Si manteniendo constante la presión del aceite se aumenta σ_I , se van obteniendo círculos sucesivos. Al alcanzar un cierto valor σ_I^* la probera rompe. Repitiendo el ensayo podemos dibujar una serie de círculos que corresponden al estado límite de rotura y, en definitiva, pensar en la existencia de una curva envolvente de todos ellos a la que llamaremos curva intrínseca de MOHR¹ (Se puede establecer otra similar para los estados de fluencia). Cualquier estado de rotura debe ser tangente a esta línea y cualquier otro, interior. Como el círculo más peligroso es el (σ_I, σ_{III}) resulta que la σ_I no interviene prácticamente en la rotura.

La evidencia de la existencia de la curva intrínseca es meramente experimental. En las figuras adjuntas damos una serie de resultados para distintos cuerpos.

Ya en 1773, COULOMB² propuso que para suelos se tomase una ley $\tau = c + (\sigma - u) \tan \varphi$ donde c representa la presión de corte remanente a tensión nula o cohesión, φ el ángulo de rozamiento del terreno u la presión intersticial o presión producida por la carga de agua contenida en el suelo.

Esta ley es una curva intrínseca formada por dos rectas de pendiente φ y ordenada en el origen c .

Una representación muy interesante ha sido sugerida por GOGUEL y LAMBE³ (1964).

En lugar de dibujar la curva intrínseca, se lleva en cada punto de abscisa $(\sigma_I^* + \sigma_{III})/2$ el valor del radio $(\sigma_I^* - \sigma_{III})/2$ del círculo de rotura,

- 1) Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik (Ernst. 1914) y Zeit. Ver. Deut. Ing. (1900).
- 2) Mem. de Math. et de Phys. Acad. Roy. Scien. 1773.
- 3) Methods of estimating settlement; Journ. Soil. Mech. ASCE Sept. 1964.

Consideraciones generales

Se consigue así una nube de puntos entre los que se puede interpolar fácilmente una recta. Veamos como se pueden relacionar ambas representaciones en el caso de curva intrínseca de COULOMB. Evidentemente

$$\frac{\sigma_I^* - \sigma_{III}^*}{2} = \frac{\sigma_I^* + \sigma_{III}^*}{2} \operatorname{sen} \varphi + c \cdot \cos \varphi$$

Pero si la ecuación de la recta interpolada es

$$\frac{\sigma_I^* - \sigma_{III}^*}{2} = d + \frac{\sigma_I^* + \sigma_{III}^*}{2} \cdot \operatorname{tg} \psi$$

identificando se obtiene

$$\left. \begin{aligned} d &= c \cdot \cos \varphi \\ \operatorname{tg} \psi &= \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \right\}$$

Existen otras representaciones que tienen en cuenta la presencia de la tensión intermedia, como es la de ROSCOE y SCHOFIELD (1958) en que las coordenadas son

$$\frac{\sigma_I + 2\sigma_{II}}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{3}$$

o sea los dos primeros invariantes si $\sigma_{II} = \sigma_{III}$

CAQUOT¹ ha demostrado que la curva intrínseca puede representarse por expresiones del tipo

$$a\sigma + b = \pm \tau_0^{3/2}$$

donde $b = \pm \tau_0^{3/2}$
y $-\frac{b}{a} = \sigma_0$

siendo τ_0 la ordenada en el origen
la resistencia a tracción hidrostática.

En los materiales frágiles $\sigma_0 \ll \tau_0$ y el círculo de compresión simple tiene un radio de unas 20 veces el de tracción simple.

En los materiales dúctiles $\sigma_0 \approx 10\tau_0$ y las resistencias a tracción y compresión son casi iguales estando $2\tau_0$ comprendido entre ellas.

La curva intrínseca explica la mejora de resistencia de los bloques de mármol en el ensayo de KARMAN.

1) Cours de resistance des materiaux (Ecole de Ponts et Chausees) 1924-25.

Consideraciones generales

En el ensayo de compresión se alcanza con σ_I la rotura.

Con la presión del aceite el círculo C pasa a ser C' y para llegar a rotura es preciso llegar a σ_I^* . Como orden de ideas diremos que σ_I es de unos 820 Kgs/cm² y σ_I^* de 13.000 Kgs./cm² (variable según σ_{III} naturalmente).

Observe que la teoría de la línea de resistencia intrínseca está basada en los resultados de ensayos complementados con un mínimo de suposiciones; a saber

- 1) que el estado límite no depende de σ_{II}
- 2) que la envolvente de los círculos de MOHR es única.

El dibujo se suele realizar con tres ensayos: compresión, tracción y cortante (este último con un tubo sometido a torsión), y se aproxima la envolvente con tangentes.

Veamos una aplicación de la línea de MOHR para determinar el estado equivalente, en el supuesto de línea recta. Sean σ_I, σ_{III} las que definan el estado dado y supongamos que se incrementan proporcionalmente, hasta unos valores de rotura

$$\sigma_I^* = n \sigma_I ; \sigma_{III}^* = n \sigma_{III}$$

En virtud de la proporcionalidad OA es tangente en B a este círculo y por ello

$$DE = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma_I^* - \sigma_{III}^*}{2} \quad C'E = \frac{\sigma_I^* + \sigma_{III}^*}{2} - \frac{\sigma}{2}$$

$$FG = \frac{\sigma'}{2} - \frac{\sigma_I^* - \sigma_{III}^*}{2} \quad C'G = \frac{\sigma_I^* + \sigma_{III}^*}{2} + \frac{\sigma'}{2}$$

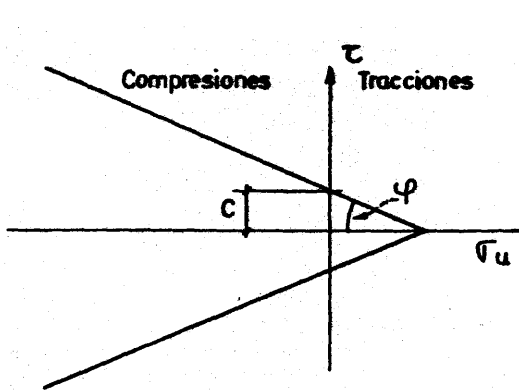
$$\text{y como } \frac{DE}{FG} = \frac{C'E}{C'G} ; \sigma = \sigma_I^* - \frac{\sigma}{\sigma_I} \sigma_{III}^* = n \left(\sigma_I - \frac{\sigma}{\sigma_I} \sigma_{III} \right)$$

$$n = \frac{\sigma}{\sigma_I - \frac{\sigma}{\sigma_I} \sigma_{III}} = \frac{\sigma}{\sigma_{\text{equivalente}}}$$

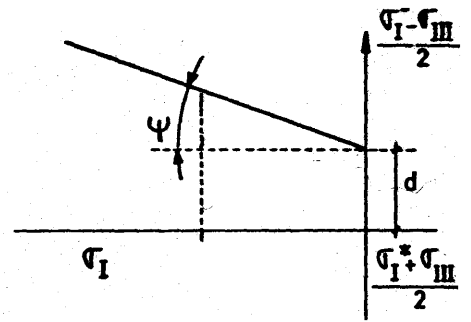
de donde

$$\sigma_{eq} = \sigma_I - k \sigma_{III} ; k = \frac{\sigma}{\sigma_I}$$

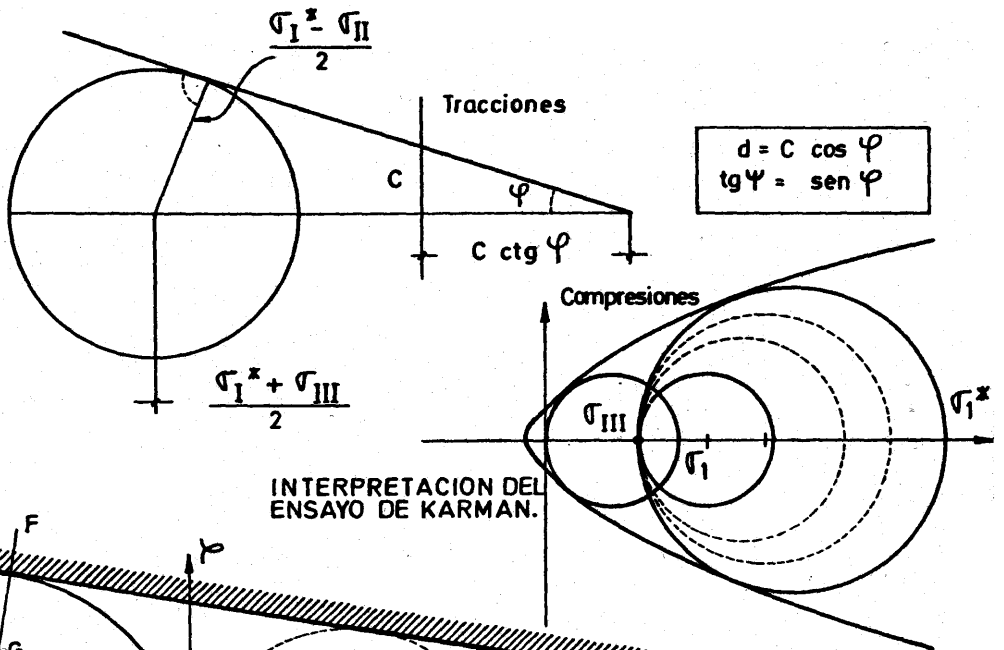
Si $\sigma = \sigma'$; $\sigma_{eq} = \sigma_I - \sigma_{III}$ (semejante al de TRESCA).



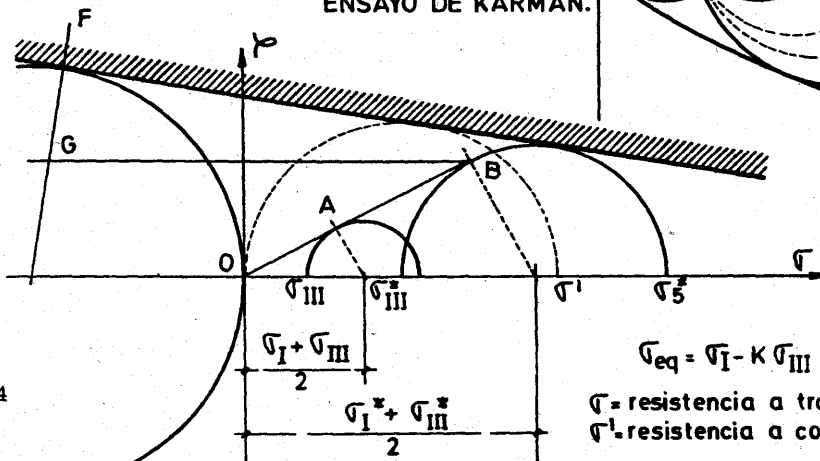
LEY DE COULOMB



REPRESENTACION DE GOGUELY LAMBE



INTERPRETACION DEL ENSAYO DE KARMAN.



$$\sigma_{eq} = \sigma_I - K \sigma_{III} ; K = \frac{\sigma}{\sigma_I}$$

σ = resistencia a tracción
 σ' = resistencia a compresión

Consideraciones generales

La principal limitación del criterio se refiere a la generalmente inexacta determinación de la zona de tracción.

2 ECUACIONES REOLOGICAS

2.1. ECUACION DE ESTADO

La reología se preocupa del estudio de la relación entre los tensores de esfuerzos, deformaciones y velocidades.

Si llamamos: σ_{ij} ; ϵ_{ij} ; $\dot{\epsilon}_{ij}$

a los tensores de tensiones, deformaciones y velocidades de deformación respectivamente, llamaremos ecuación reológica de estado a toda expresión del tipo

$$R(\sigma_{ij} ; \epsilon_{ij} ; \dot{\epsilon}_{ij}) = 0$$

Una ecuación que se ocurre inmediatamente es $\epsilon_{ij} = 0$

Si todas las componentes de deformación son nulas, nos encontramos ante el cuerpo rígido de la mecánica racional.

Es costumbre denominar a cada cuerpo por el nombre del primer (o mas significado) investigador que lo ha estudiado. Por ello, al cuerpo representado por la ecuación anterior se le llama cuerpo de EUCLIDES.

Se puede demostrar (véase vg.: la obrita de REINER) que en la ecuación de estado se encuentran contenidas las del movimiento mas general posible.

Otra ecuación inmediata es la de los líquidos incompresibles o cuerpo de PASCAL. Evidentemente:

$$J_1 = \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ecuaciones reológicas

Además el líquido sólo resiste un estado hidrostático de presiones por lo que habrá que añadir:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^o + \sigma_{ij}^d = \sigma_{ij}^o = -p \delta_{ij}$$

En resumen el líquido de PASCAL se caracteriza por:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = \theta p \\ \sigma_{ij}^d = 0 \\ \sigma_{ij}^o = -p \delta_{ij} \end{array} \right.$$

Todos los cuerpos reales se sitúan entre estos extremos, y vamos a intentar construir las ecuaciones reológicas a partir de las mas familiares.

2.2. CUERPOS DE HOOKE, SAINT-VENANT Y NEWTON

Se pueden imaginar ecuaciones del tipo $\sigma_{ij} = f(\epsilon_{ij})$ y en particular las lineales $\sigma_{ij} = K \cdot \epsilon_{ij}$. Para encontrar los cuerpos conocidos es preferible sin embargo separar las variables reológicas y colocar dos ecuaciones independientes para las componentes esférica y desviadora de los tensores.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}^o = K \epsilon_{ij}^o \\ \sigma_{ij}^d = \Phi \epsilon_{ij}^d \end{array} \right.$$

Hemos elegido los cuerpos elástico, plástico y viscoso conocidos de antemano, y vamos a ver cómo establecemos el parentesco con las nociones previas.

Para ellos K es una constante ya utilizada: el coeficiente de compresibilidad, y la función Φ debe ser estudiada en cada caso.

Ecuaciones reológicas

En el cuerpo de HOOKE:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^o = K \varepsilon_{ij}^o \\ \sigma_{ij}^d = 2G \cdot \varepsilon_{ij}^d \end{cases}$$

G es el módulo de rigidez. En efecto, si se considera el ensayo de tracción:

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_x}{E} \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el tensor σ_{ij} , $\sigma_{oct} = \frac{\sigma_x}{3}$ por lo que:

$$\sigma_{ij}^o = \frac{\sigma_x}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{ij}^d = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_x}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_x}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sigma_x \end{pmatrix}$$

En el tensor ε_{ij} ; $\varepsilon_{oct} = \frac{\sigma_x}{3E} (1-2\nu)$ y

$$\varepsilon_{ij}^o = \frac{\sigma_x (1-2\nu)}{3E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \varepsilon_{ij}^d = \frac{\sigma_x}{3E} \begin{pmatrix} -(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij}^o = K \varepsilon_{ij}^o; \quad \frac{\sigma_x}{3} \delta_{ij} = K \frac{\sigma_x}{3} \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij}$$

$K = \frac{E}{1-2\nu}$ = módulo de compresibilidad según advertimos.

Ecuaciones reológicas

Por otro lado:

$$\sigma_{ij}^d = 2G \epsilon_{ij}^d$$

implica:

$$\frac{\sigma_{ij}}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2G \frac{\sigma_{ij}(1+\nu)}{3E} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

que corresponde a la definición de módulo de rigidez.

La analogía mecánica del cuerpo hookeano es un muelle.

Así pues las tensiones principales:

$$\sigma_i = 3K \frac{J_1}{3} + 2G \left(\epsilon_i - \frac{J_1}{3} \right)$$

y haciendo: $\lambda = K - \frac{2}{3} G$

$$\boxed{\sigma_i = \lambda J_1 + 2G \epsilon_i}$$

que son las ecuaciones de LAME.

Sabemos que: $E = \frac{9KG}{3K+G}$

de modo que si el sólido fuera incompresible: $E^* = 3G$

Para ver un ejemplo de material rígido plástico nada mejor que el cuerpo de SAINT-VENANT (recuérdese el criterio de la máxima deformación). El cuerpo presenta un comportamiento indeformable hasta que se supera un cierto valor de la tensión; el modelo mecánico será un bloque que roza con el suelo y no se mueve (no hay deformación) mientras no se supera el cono de rozamiento. Mas

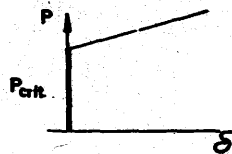
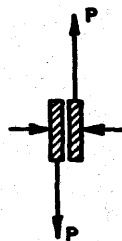
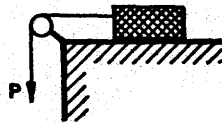
Ecuaciones reológicas



CUERPO DE HOOKE



CUERPO DE NEWTON



CUERPO DE SAINT-VENANT

Ecuaciones reológicas

allá de la tensión crítica se supone variación proporcional al tensor velocidad de deformación.

Es decir, como el cuerpo es indeformable, la primera relación es:

$$0 = \dot{\epsilon}_{ij}^0 \quad (K = \infty)$$

y para la segunda:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^d \leq \sigma_{ij}^{crit} \rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}^d = 0 \\ \sigma_{ij}^d > \sigma_{ij}^{crit} \rightarrow \sigma_{ij}^d = 2\lambda \dot{\epsilon}_{ij}^d \end{cases}$$

Como $\dot{\epsilon}_{ij}^0 = 0$ la última relación es $\sigma_{ij}^d = 2\lambda \dot{\epsilon}_{ij}^d$ equivalente a las seis relaciones:

$$\frac{1}{2\lambda} = \frac{\dot{\epsilon}_x}{(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{\tau_{xz}}$$

Si:

$$\lambda = \frac{\sigma_{ij}^d}{2\dot{\epsilon}_{ij}^d} = \frac{\tau_{oct}}{\dot{\gamma}_{oct}}$$

(recuérdese que $\sigma_{oct}^d = 0$)

y como (apéndice 2):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{oct} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{I_1^2}{3} - I_2} \\ \dot{\gamma}_{oct} &= 2\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\dot{J}_1^2}{3} - \dot{J}_2} \end{aligned} \right\} \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{I_1^2 - 3 I_2}{\dot{J}_1^2 - 3 \dot{J}_2}}$$

Como modelo viscoso escogemos el líquido de NEWTON,

Ecuaciones reológicas

Es un líquido compresible, viscoso, en que la velocidad de deformación es proporcional a la fuerza aplicada.

Estableciendo un paralelismo con el sólido de HOOKE:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^o = k J_1 \delta_{ij} \\ \sigma_{ij}^d = 2 \eta \dot{\epsilon}_{ij}^d \end{cases} \quad J_1 = \theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

El líquido de PASCAL es intermedio con $k = \infty$ y $\eta = 0$

La componente η es la viscosidad dinámica.

El modelo mecánico es un émbolo perforado que se mueve en un líquido viscoso.

De la analogía con el cuerpo de HOOKE, si el líquido es incompresible aparece un coeficiente de tensión viscosa:

$$(TROUTON) \quad E_v^* = 3\eta$$

Este modelo ha sido utilizado como posible representación de las corrientes de convección en el manto.

Situando el origen en el centro del globo se estudia la posibilidad de la solución:

$$V(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}) \begin{cases} \dot{u} = xz \\ \dot{v} = yz \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = z \\ \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} = z \end{cases}$$

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = 0; \quad \dot{\epsilon}_z = -2z; \quad \dot{w} = -z^2 + cte$$

Admitamos:

$$\begin{cases} \dot{u} = xz \\ \dot{v} = yz \\ \dot{w} = 1 - z^2 - 2(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Ecuaciones reológicas

Veamos si se cumplen las condiciones establecidas en el apéndice 4 para los fluidos viscosos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = 2 \quad ; \quad \dot{\epsilon}_3 = -2z \quad ; \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} = 0 \\ \dot{\gamma}_{xz} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} = x - 4x = -3x \quad ; \quad \dot{\gamma}_{yz} = -3y \end{array} \right.$$

$$\text{rot } \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} \end{vmatrix} = R_1 \bar{i} + R_2 \bar{j} + R_3 \bar{k} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = -4y \\ R_2 = x - 4x = -3x \\ R_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 R_1 = \nabla^2 R_2 = \nabla^2 R_3 = 0$$

$$\nabla^2 \dot{u} = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \dot{v} = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \dot{w} = -10$$

Como

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\eta \quad \nabla^2 \dot{u} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\eta \quad \nabla^2 \dot{v} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = -\eta \quad \nabla^2 \dot{w} = -10\eta$$

integrando $\eta = 10\eta z$

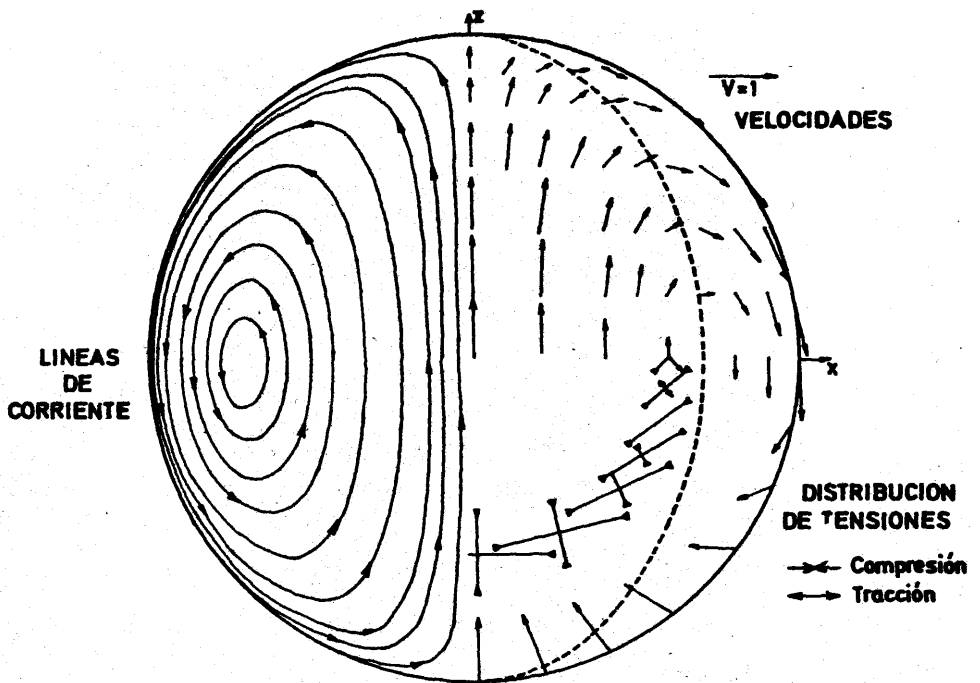
En estas condiciones el estado de tensiones sería

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 12\eta z \\ \sigma_y = 12\eta z \\ \sigma_z = 6\eta z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = -3x\eta \\ \tau_{yz} = 3y\eta \end{array} \right.$$

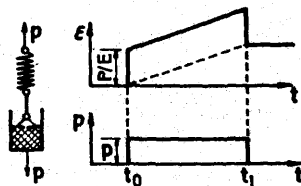
Según el apéndice 3 la energía elástica es

$$U = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{2E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G}$$

$$U = \frac{\eta^2}{E} (162z^2 + 9x^2 + 9y^2) + \frac{\nu\eta^2}{E} (-288z^2 + 9x^2 + 9y^2)$$

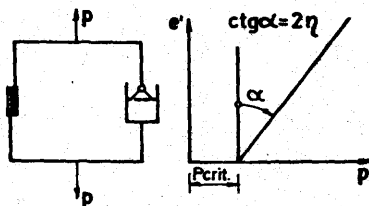


DEFORMACION DE UNA ESFERA VISCOSA (Según GOGUEL)



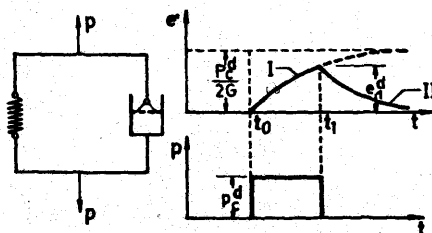
CUERPO DE MAXWELL

$$M = H - N$$



CUERPO DE BINGHAM

$$B = StV//N$$



CUERPO DE KELVIN

$$K = H//N$$

Ecuaciones reológicas

2.3. MODELOS REOLOGICOS COMPLEJOS

Nuevos cuerpos ideales, cuyo comportamiento puede, a veces, asimilarse al encontrado en fenómenos naturales, se obtienen al conectar varios de los anteriores.

Si los cuerpos conectados presentan la misma de formación se dice que están en paralelo, si están sometidos a la misma tensión se dice que están en serie. Si llamamos

N	al cuerpo de NEWTON
StV	al cuerpo de SAINT-VENANT
H	al cuerpo de HOOKE

y simbolizamos por $//$ la conexión en paralelo y por $-$ la conexión en serie, vamos a analizar las siguientes combinaciones

M = H - N	o cuerpo de MAXWELL
B = StV $//$ N	o cuerpo de BINGHAM
K = H $//$ N	o cuerpo de KELVIN

El primero y el tercero son viscoelásticos y el segundo viscoplástico.

El modelo estructural del primero es el de la figura, formado por dos elementos sometidos a la misma tensión. El diagrama $\epsilon - t$ se obtiene fácilmente por superposición.

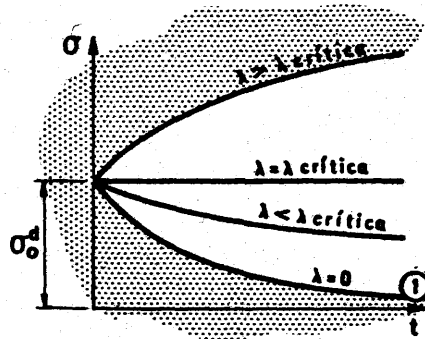
El esquema se puede aplicar a la componente esférica o a la desviadora. En esta última, como para el cuerpo de HOOKE $\sigma_{ij}^d = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij}^d$ y para el de NEWTON $\sigma_{ij}^d = 2G \epsilon_{ij}^d$ derivando la primera obtenemos $\dot{\sigma}_{ij}^d = 2G \dot{\epsilon}_{ij}^d$

El tensor de velocidad de deformación para el cuerpo de MAXWELL es, entonces

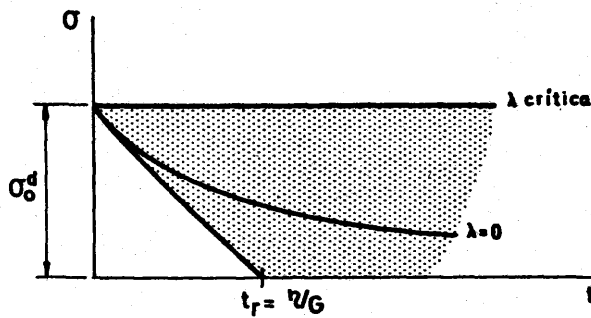
$$\dot{\epsilon}_{ij}^d = \frac{\dot{\sigma}_{ij}^d}{2G} + \frac{\sigma_{ij}^d}{2\eta}$$

que es la ecuación reológica del cuerpo.

Ecuaciones reológicas



CURVAS DE MAXWELL



INTERPRETACION DEL TIEMPO DE RELAJACION

Ecuaciones reológicas

(Observese que $\epsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} + \frac{1}{2\eta} \int \sigma(z) dz$ es decir que la deformación en un instante dado depende de todos los valores anteriores. El cuerpo tiene memoria.)

Poniéndola como $\dot{\sigma}_{ij}^d + \frac{G}{\eta} \sigma_{ij}^d = 2G \dot{\epsilon}_{ij}^d$ la ecuación homogénea correspondiente $\dot{y} + \frac{G}{\eta} y = 0$ tiene por solución $y = y_0 e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)}$

Si se admite $\sigma_{ij}^d = u y$; $\dot{\sigma}_{ij}^d = \dot{u} y + u \dot{y}$ y $\dot{u} y + u(\dot{y} + \frac{G}{\eta} y) = 2G \dot{\epsilon}_{ij}^d$; $\dot{u} = 2G \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^d}{y} \rightarrow du = 2G \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^d}{y} dz$ o bien $u = u_0 + \frac{2G}{y_0} \int_{t_0}^t \dot{\epsilon}_{ij}^d e^{\frac{G}{\eta}(z-t_0)} dz \quad (t_0 \leq z < t)$

La solución final es, pues

$$\sigma_{ij}^d = e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)} \left[u_0 y_0 + 2G \int_{t_0}^t \dot{\epsilon}_{ij}^d e^{\frac{G}{\eta}(z-t_0)} dz \right]$$

Si hacemos constante la velocidad de deformación $\dot{\epsilon}_{ij}^d = 1$ y llamamos $\sigma_{ij0}^d = u_0 y_0$ tendremos

$$\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij0}^d e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)} + 2\lambda\eta \left[1 - e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)} \right]$$

dando diferentes valores a $\lambda = \dot{\epsilon}_{ij}^d$ obtenemos las curvas de relajación correspondientes. Por ejemplo si $\lambda = 0$ se obtiene la curva (1)

$$(1) \quad \sigma_{ij}^d = \sigma_{ij0}^d e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)}$$

curva de relajación para alargamiento constante, con una asíntota en el eje t.

$t_r = \eta/G$ puede ser llamado tiempo de relajación (Es el tiempo que tarda la tensión en reducirse a 1/e de su valor).

Si se hace $2\eta\lambda \cdot \sigma_{ij0}^d$ se obtiene $\lambda_{crit} = \frac{\sigma_{ij0}^d}{2\eta}$

$$\sigma_{ij}^d = 2\eta\lambda \cdot \sigma_{ij0}^d$$

es decir no existe relajación.

Ecuaciones reológicas

Para valores $\lambda > \lambda_{crit}$ la curva de relajación se invierte y es del tipo (2), mientras que si se mantiene $0 < \lambda < \lambda_{crit}$ es del tipo 1.

Para la curva de relajación $\lambda = 0$ la tangente tiene una pendiente

$$\dot{\sigma}_{ij}^d = -\sigma_{ij0}^d \cdot e^{\frac{G}{2} t_0} \cdot \frac{G}{2} e^{-\frac{G}{2} t}$$

Si se hace $t=0$ la recta tangente es

$$\sigma - \sigma_0^d = -\sigma_{ij0}^d \frac{G}{2} e^{\left(\frac{G}{2}\right) t_0} \cdot t$$

Si $\sigma = 0$ queda

$$t = \frac{2}{G} = t_r$$

El cuerpo de BINGHAM es la colocación en paralelo de los cuerpos de NEWTON y SAINT-VENANT, es decir ambos tendrán un alargamiento común. La fluencia solo aparece cuando $\sigma_{ij} > \sigma_{crit}$ y los siguientes incrementos de tensión serán absorbidos por el émbolo.

Evidentemente $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^N + \sigma_{ij}^{stV}$

de modo que para $\sigma_{ij} > \sigma_{crit}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{crit} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij}$ con lo que la ecuación reológica es

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sigma_{crit}}{2\eta}$$

Paralelamente a lo realizado con el cuerpo de MAXWELL, esta ecuación puede ser aplicada a las componentes esférica o desviadora.

Un ejemplo típico de este cuerpo es la pintura al óleo, y precisamente estudiando la posibilidad de conseguir una pintura muy manejable pero que no fluyera al ser colocada sobre una pared vertical, fue como se estableció el modelo.

El cuerpo de KELVIN se obtiene sometiendo a la misma deformación al conjunto formado por un muelle (H) y un émbolo (N).

Si nos ocupamos del desviador la ecuación de par-

$$\sigma_{ij}^d = 2G \epsilon_{ij}^d + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij}^d$$

Ecuaciones reológicas

Formalmente la solución es por completo análoga a la del cuerpo de MAXWELL, pero en tensiones. Puede comprobarse que

$$\epsilon_{ij}^d = e^{-\frac{\sigma}{\eta}(t-t_0)} \left[\epsilon_{ij0}^d + \frac{1}{2\eta} \int_{t_0}^t \sigma_{ij}^d \cdot e^{\frac{\sigma}{\eta}(t-t_0)} \cdot dt \right]$$

Si se toman valores constantes $\lambda = \frac{\sigma_{ij}^d}{2\eta}$

$$\epsilon_{ij}^d = \epsilon_{ij0}^d \cdot e^{-\frac{\sigma}{\eta}(t-t_0)} + \frac{1}{2\eta} \lambda [1 - e^{-\frac{\sigma}{\eta}(t-t_0)}]$$

Valores diferentes de λ conducen a las varias curvas de fluencia.

Si $\epsilon_{ij0}^d = 0$, es decir alargamiento inicial nulo, la curva tiene la forma indicada. Si en t_1 se descarga, la ecuación aplicable es

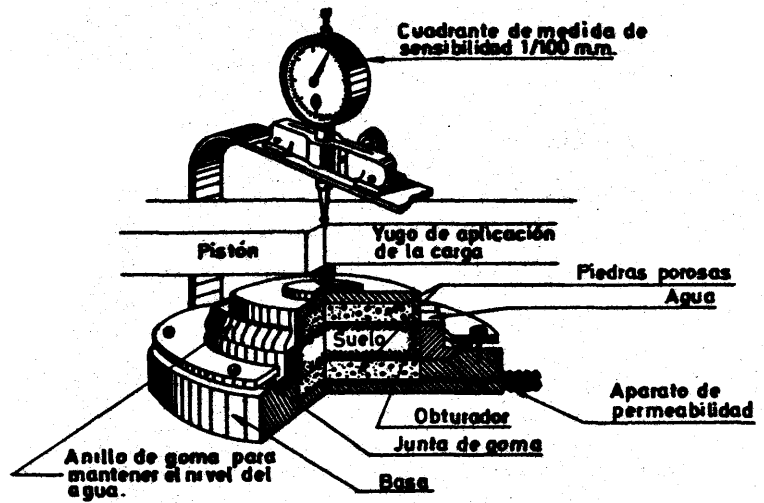
$$\epsilon_{ij}^d = \epsilon_{ij1}^d e^{-\frac{\sigma}{\eta}(t-t_1)}$$

Una interesante aplicación de los modelos anteriores es la versión reológica del comportamiento de los terrenos arcillosos en el ensayo edométrico.

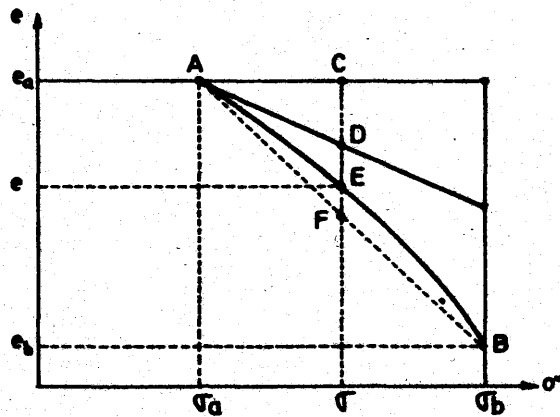
El edómetro es un cilindro suficientemente bajo para que el rozamiento de las paredes laterales no influya en el ensayo. Las bases son de bronce poroso con objeto de permitir el escape del agua contenida por la arcilla. Al comprimir una muestra de suelo entre sus caras se produce un acortamiento debido a la expulsión del agua y al acortamiento elástico del material. Si llamamos e al índice de poros (razón del espacio ocupado por los poros al ocupado por las partículas sólidas), la forma general de la curva es la indicada.

Con objeto de explicar el comportamiento mediante un modelo reológico, TAYLOR y MERCHANT¹ razonan de la siguiente manera²; en la curva (índice de huecos-presión sobre las partículas sólidas) aparece una consolidación primaria CD que se produce instantáneamente bajo la acción de un $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_a$, y una consolidación secundaria DE que varía con el tiempo, tendiendo a DF.

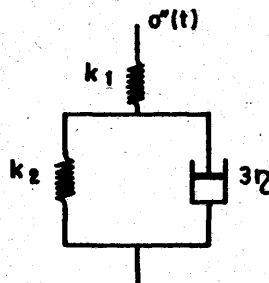
- 1) "A theory of clay consolidation accounting for secondary compression" J. Maths and Physics, 19, 1940.
- 2) La teoría aquí expuesta se refiere solo al esqueleto sólido sin tener en cuenta la presión resistida por el agua.



EDOMETRO CASAGRANDE



PROCESO DE CONSOLIDACION (Taylor y Merchant)



INTERPRETACION REOLOGICA

Ecuaciones reológicas

Es decir

$$\Delta e = \Delta e_1 + \Delta e_2$$

Evidentemente, a cada Δe le corresponde un acortamiento

$$\Delta \epsilon = \frac{-\Delta e}{1 + e_a}$$

TAYLOR y MERCHANT observaron:

- a) que la consolidación primaria y la secundaria dependen linealmente del incremento de presión.
- b) que la velocidad de la consolidación secundaria es proporcional en cada instante E a la parte $\Delta e_2'$ EF de consolidación futura.

Estas relaciones se pueden poner en la forma

$$1) \frac{\Delta \epsilon_1}{\Delta \sigma} = \frac{\frac{-\Delta e_1}{1+e_a}}{\Delta \sigma} = m_1 ; \Delta \epsilon_1 = -m_1 \Delta \sigma (1+e_a)$$

$$2) \frac{\Delta \epsilon_2}{\Delta \sigma} = \frac{\frac{-\Delta e_2}{1+e_a}}{\Delta \sigma} = m_2 ; \Delta \epsilon_2 = -m_2 \Delta \sigma (1+e_a)$$

$$3) \frac{\partial e_2^t}{\partial t} = \mu |\Delta e_2'| \cdot \mu (\Delta e_2 - \Delta e_2^t) \left\{ \begin{array}{l} \Delta e_2 = DF \\ \Delta e_2^t = DE \\ \Delta e_2' = EF \end{array} \right.$$

Entrando con 2) en 3) $-\frac{\partial e_2^t}{\partial t} = \mu [m_2 \Delta \sigma (1+e_a) + \Delta e_2^t]$

$$\Delta \sigma = \frac{-1}{\mu(1+e_a)m_2} \frac{\partial e_2^t}{\partial t} - \frac{\Delta e_2^t}{\mu(1+e_a)m_2}$$

$$\Delta \sigma = \frac{\epsilon_2^t}{m_2} + \frac{1}{\mu m_2} \frac{\partial \epsilon_2^t}{\partial t}$$

Comparando esta ecuación con la del cuerpo de KELVIN aplicado a las componentes esféricas se obtiene la igualdad si

$$m_2 = \frac{1}{k_2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\mu m_2} = 3\eta$$

La compresión secundaria es la de un cuerpo de KELVIN. Como la primaria es evidentemente la de un cuerpo de HOOKE con $m_1 = 1/k_1$ el modelo completo es el de la figura. El comportamiento de la arcilla se puede comprender ahora muy bien.

Ecuaciones reológicas

Cuando una presión σ actúa, el primer muelle se comprime instantáneamente, pero el asiento del cuerpo de KELVIN se retrasa porque el pistón lo impide.

La presión σ varía con el tiempo, pues (ver nota 2) el agua, que absorbía parte de la carga, empieza a fluir por las placas porosas y el esqueleto sólido acaba resistiendo toda la presión. El acortamiento del muelle 1) es así gradual hasta que toda la presión se hace efectiva.

El cuerpo de KELVIN va tomando presión paralelamente; al principio toda es absorbida por el pistón pero a lo largo del tiempo se produce la transferencia al muelle, por lo que, al final el acortamiento es la suma de los de los muelles.

$$\text{Como } \epsilon = \epsilon^H + \epsilon^K$$

$$\text{en el cuerpo de HOOKE } \sigma_{ij}^0 = 3k \epsilon_{ij}^0$$

$$\text{y en el de KELVIN } \epsilon_{ij}^0 = e^{-\frac{\sigma}{\eta}(t-t_0)} \left[\epsilon_{ij}^0 + \frac{1}{3\eta} \int_{t_0}^t \sigma'_{ij} e^{\frac{\sigma}{\eta}(t-t_0)} d\tau \right]$$

$$\text{Si se admite } \epsilon_{ij} = 0 \text{ para } t = 0$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{3k} + \frac{1}{3\eta} \int_0^t \sigma'(\tau) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\eta}(t-\tau)} \cdot d\tau$$

Posterioros estudios han mejorado esta aproximación.

Es en particular interesantísimo el modelo para consolidación tridimensional de FOLQUE¹ que el lector interesado puede consultar en la obra de MUZAS o en la de SULKJE.

El modelo de MERCHANT nos ha introducido en los cuerpos de más de tres elementos. Aunque no podamos tratarlos con detalle no podemos dejar de mencionar el cuerpo de SHWEDOFF [H - (StV//M)].

1) Reología de solos nao saturados. Laboratorio Nacional da engenharia civil. Lisboa 1961.

Ecuaciones reológicas

El de SCHOFIELD y SCOTT BLAIR (N - K), propuesto para estudiar el comportamiento de la masa de pan que presenta una relajación de los esfuerzos y un punto crítico de fluencia. Más complicado es el de BURGERS que tiene cuatro elementos, y explica la fluencia de los metales. El resorte superior da el movimiento elástico, el dispositivo intermedio la fluencia lenta o reactividad y el amortiguador la fluencia a velocidad constante que es la única irreversible y corresponde al alargamiento permanente. La ecuación, según el principio de superposición, sería

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2G}{\eta_2} \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2G_1} \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3} + \frac{G_2}{G_1\eta_2}\right) \frac{d\sigma}{dt} + \frac{2G_2}{\eta_2\eta_3} \sigma$$

FENOMENOS DE SEGUNDO ORDEN

Si la expresión $\epsilon = \Delta L/L_0$ se reemplaza por funciones $f(L/L_0)$ que cumplen las tres condiciones siguientes

$$\left\{ \begin{array}{l} a) f(L/L_0) = 0 \text{ para } L/L_0 = 1 \\ b) f(L/L_0) \approx \frac{\Delta L}{L_0} \text{ si } L/L_0 \approx 1 \\ c) f(L/L_0) \text{ carece de dimensiones} \end{array} \right.$$

se obtienen otras formas de relaciones reológicas que pueden expresar nuevos fenómenos.

El sólido de SWAINGER se obtiene con

$$f = 1 - \frac{L_0}{L} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

$$\sigma = 2G \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

En el sólido de GREEN es $f = \frac{(\frac{L}{L_0})^2 - 1}{2} = \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2}$

$$\text{con } \sigma = 2G\epsilon + 2G \frac{\epsilon^2}{2}$$

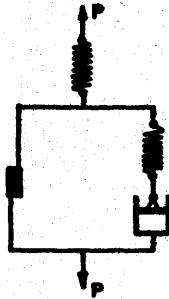
En el de ALMANZI

$$f = \frac{1 - (\frac{L_0}{L})^2}{2 \frac{L_0}{L}} = \frac{\epsilon^2 + 2\epsilon}{2(1+\epsilon)^2}$$

con

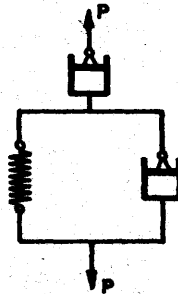
$$\sigma = 2G \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2} + G \frac{\epsilon^2}{(1+\epsilon)^2}$$

Ecuaciones reológicas



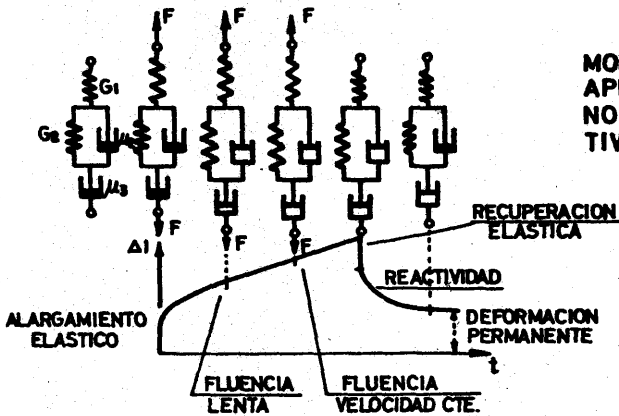
MODELO DE SCHWEDOFF

$$\dot{H} - \left\{ \frac{S \dot{V}}{H} \right\} = H - \left(\frac{S \dot{V}}{M} \right)$$



MODELO DE SCHOFIELD Y SCOTT - BLAIR

$$\dot{N} - \left(\frac{H}{N} \right) = N - K$$



MODELO DE BURGERS Y APLICACION A LOS FENOMENOS DE FLUENCIA Y REACTIVIDAD DE UN METAL

Ecuaciones reológicas

Se definen así una cantidad de cuerpos que, de modo general se dice que tienen elasticidad de segundo orden.

3

MODELOS REOLOGICOS LINEALES

3.1. DEFINICIONES

Se dice de un cuerpo que es lineal cuando se puede establecer entre las tensiones y deformaciones una relación del tipo

$$C_0 \dot{\epsilon} + C_1 \ddot{\epsilon} + C_2 \dddot{\epsilon} + \dots = k_0 \sigma + k_1 \dot{\sigma} + k_2 \ddot{\sigma} + \dots$$

En los cuerpos lineales se cumple el principio de superposición; es decir, si en el estado 1

$$C_0 \dot{\epsilon}_1 + C_1 \ddot{\epsilon}_1 + C_2 \dddot{\epsilon}_1 + \dots = k_0 \sigma_1 + k_1 \dot{\sigma}_1 + k_2 \ddot{\sigma}_1 + \dots$$

y en el estado 2

$$C_0 \dot{\epsilon}_2 + C_1 \ddot{\epsilon}_2 + C_2 \dddot{\epsilon}_2 + \dots = k_0 \sigma_2 + k_1 \dot{\sigma}_2 + k_2 \ddot{\sigma}_2 + \dots$$

al sumar

$$C_0 (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) + C_1 (\ddot{\epsilon}_1 + \ddot{\epsilon}_2) + \dots = k_0 (\sigma_1 + \sigma_2) + k_1 (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) + \dots$$

cuando los dos estados de tensión σ_1 , σ_2 actúan juntos, la deformación es la suma de las deformaciones parciales.

A efectos de análisis el principio de superposición es sumamente útil, por ello con todos los cuerpos que cumplen el principio de superposición se forma el conjunto de los cuerpos BOLTZMANIANOS.

Modelos reológicos lineales

Evidentemente todo cuerpo lineal es BOLTZMANIANO, pero pueden existir otros que, sin obedecer a la ecuación lineal, admiten el principio de superposición. La llamada función de fluencia de ANDRADE es un ejemplo

$$f(t) = \frac{1}{G_0} + \log(1 + \beta \sqrt[t]{t}) + \frac{t}{\eta_c}$$

Todos los cuerpos, a excepción de aquéllos en los que interviene el de SAINT-VENANT, tratados en el capítulo II, responden a una ecuación

$$a_0 + a_1 \epsilon + a_2 \dot{\epsilon} + a_3 \sigma + a_4 \dot{\sigma} = 0 \quad (a_i = \text{cte})$$

según han hecho notar HOHENEMSER y PRAGER. Es decir todos los cuerpos formados por elementos hookeanos o newtonianos son lineales y, en consecuencia, BOLTZMANIANOS.

3.2. LAS FUNCIONES DE RELAJACION Y FLUENCIA. CUERPOS GENERALIZADOS.

En el capítulo II obtuvimos para el cuerpo de KELVIN

$$\epsilon_{ij}^d = \epsilon_{ij0}^d e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)} + \frac{1}{2G} \sigma_{ij}^d [1 - e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)}]; \quad (\sigma_{ij}^d = \text{cte.})$$

Si se supone que el alargamiento inicial es cero

$$\epsilon_{ij}^d = \frac{1}{2G} \sigma_{ij}^d [1 - e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)}]$$

Si hay una parte de deformación debida a la elasticidad instantánea habrá que añadir un término $\sigma_{ij}^d / 2G_0$.

El cociente

$$f(t) = \frac{\epsilon_{ij}^d}{\sigma_{ij}^d} = \frac{1}{2G_0} + \frac{1}{2G} [1 - e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)}]$$

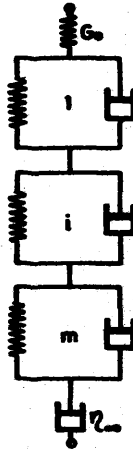
es llamado función de fluencia del cuerpo de KELVIN.

De modo análogo, al estudiar el cuerpo de MAXWELL poniendo $\sigma_{ij}^d = 2G \epsilon_{ij}^d$ se obtiene

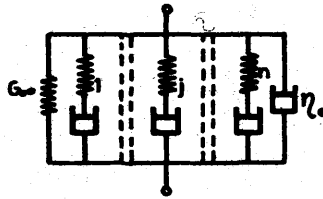
$$\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij0}^d e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij}^d [1 - e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)}]$$

Si $\dot{\epsilon}_{ij}^d = 0$

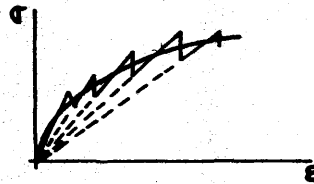
$$\sigma_{ij}^d = 2G \epsilon_{ij0}^d e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)}$$



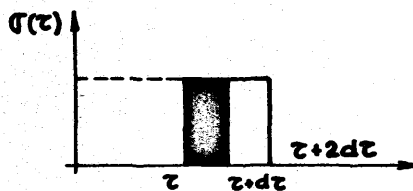
MODELO DE KELVIN - VOIGT GENERALIZADO



MODELO DE MAXWELL GENERALIZADO



APROXIMACION DE UNA CURVA REAL
CON UN MODELO GENERALIZADO



LA TENSION FINAL ES PROPORCIONAL
AL TIEMPO DE CARGA

Modelos reológicos lineales

Conviene añadir la elasticidad instantánea $2G_{\infty}\epsilon_{ij}^d$ pero además debe aparecer un término $\eta \delta(t)$ que representa un flujo viscoso irreversible ($\delta(t)=0$ para $t \neq 0$)

Físicamente implica que una experiencia perfecta de relajación es imposible: no se puede conseguir en el instante 0 un alargamiento brusco en la probeta de ensayo.

Se llama función de relajación del cuerpo de MAXWELL

$$r(t) = \frac{\sigma_{ij}^d}{\epsilon_{ij}^o} = 2G_{\infty} + 2G e^{-\frac{t-t_p}{\tau}} + \eta \cdot \delta(t)$$

En general cualquier cuerpo fluye y se relaja. El estudio de uno u otro aspecto se realizará según las condiciones de contorno: Si éstas son tensiones obligadas se enfocará el problema como fluencia, si son deformaciones como relajación.

En consecuencia surge la idea de aproximar cualquier sólido por superposición de muchos cuerpos de KELVIN o MAXWELL. En ese caso

$$f(t) = \frac{1}{2G_0} + \sum_i \frac{1}{2G_i} \left[1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_i}} \right]$$

$$r(t) = 2G_{\infty} + \sum_i 2G_i \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau_i}} + \eta \delta(t)$$

La curva de fluencia está formada por trozos de recta que pasan por el origen y lo mismo sucede para la relajación.

Quando el número de elementos tiende a ∞ vemos la posibilidad de asimilar cualquier curva que nos interese según uno u otro esquema.

3.3. LA FUNCIÓN MEMORIA

Supongamos que sobre un cuerpo actúan en dos instantes sucesivos τ y $\tau+d\tau$ dos tensiones $\sigma(\tau)$ iguales que duran precisamente $d\tau$.

Si al cabo de un tiempo posterior t la primera ha producido una deformación, remanente $d\epsilon(t)$, la segunda también tendrá $d\epsilon(t)$ ya que se pueden despreciar los términos de segundo orden.

Modelos reológicos lineales

Un impulso $\sigma(z)$ de duración $2 dz$ producirá una deformación $2 de(t)$; es decir la deformación remanente es proporcional al tiempo de aplicación de la tensión. También -evidentemente- al valor de $\sigma(z)$ y, además, a una función del tiempo transcurrido entre el instante de aplicación y el momento de observación. En resumen:

$$d\epsilon(t) = \sigma(z) \cdot f'(t-z) dz$$

A la función $f'(t-z)$ se la suele llamar función memoria y debe ser continua y decreciente con $u = (t-z)$ pues no parece lógico que los impulsos antiguos tengan mas importancia que los recientes.

Al integrar
$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \sigma(z) \cdot f'(t-z) dz$$

Si se tiene en cuenta la tensión del instante t

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{G_0} + \int_{-\infty}^t \sigma(z) \cdot f'(t-z) dz$$

Si se hace $\sigma(z)=0$ para $z < 0$

$\sigma(z) = \sigma_0$ para $z > 0$ se obtiene la función de fluencia

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{G_0} + f(t) - f(0) \right)$$

Al escoger $f(0) = \frac{1}{G_0}$ $\epsilon(t) = \sigma_0 \cdot f(t)$

la derivada de la función de fluencia es la función memoria con tensión impuesta.

Un razonamiento análogo conduce a

$$\sigma(t) = \epsilon(t) G_0 + \int_{-\infty}^t \epsilon(z) \cdot r'(t-z) dz$$

donde $r'(t-z)$ es otra función memoria. Se obtiene así que la derivada de la función de relajación es la función memoria con deformación impuesta.

Modelos reológicos lineales

Si se conoce la función de relajación $r(t)$, el estado de tensión de un cuerpo de BOLTZMANN se puede prever si disponemos de la deformación en función del tiempo.

Por ejemplo si en un cuerpo de MAXWELL de

$$r(t) = G e^{-\mu t}$$

se aplica a partir de $t = 0$ una $\epsilon(t) = a t$ las tensiones son

$$\sigma(t) = \frac{a G}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$$

3.4. TRANSFORMACION DE MODELOS VISCOELASTICOS EN MODELOS ELASTICOS

La transformación de CARSON-LAPLACE se puede utilizar fructíferamente en el tratamiento de los problemas viscoelásticos.

Haciendo el cambio $u = t - \tau$ las funciones de relajación y fluencia se pueden poner en la forma

$$\begin{cases} \epsilon(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \sigma(t-u) \cdot f(u) du \\ \sigma(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \epsilon(t-u) \cdot r(u) du \end{cases}$$

Como, según el apéndice

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = p L[f] - p f(0)$$

$$\text{y } L\left[\int_0^t f(u) \cdot g(t-u) du\right] = \frac{1}{p} F(p) \cdot G(p)$$

es evidente que

$$L\left[\frac{d}{dt} \int_0^t f(u) \cdot g(t-u) du\right] = L[f(u)] \cdot L[g(u)]$$

que al ser aplicado a las ecuaciones anteriores conduce a

$$L \epsilon = L f \cdot L \sigma$$

$$L \sigma = L r \cdot L \epsilon$$

Modelos reológicos lineales

Por comodidad, se suele escribir

$$\epsilon^*(p) = f^*(p) \cdot \sigma^*(p)$$

$$\sigma^*(p) = r^*(p) \cdot \epsilon^*(p)$$

Análogas a la ley de HOOK

introduciendo la segunda en la primera se obtiene

$$f^*(p) \cdot r^*(p) = 1$$

Las transformadas de las funciones de fluencia y relajación son inversas una de otra.

Si se aplica a las componentes de distorsión del cuerpo de MAXWELL.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^d = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}_{ij}^d + \frac{\sigma_{ij}}{2\eta}$$

$$p[\epsilon_{ij}^* - \epsilon_{ij}(0)] = \frac{p}{2G} [\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}(0)] + \frac{1}{2\eta} \sigma_{ij}^*$$

$$p\epsilon_{ij}^* = \left[\frac{p}{2G} + \frac{1}{2\eta p} \right] \sigma_{ij}^* - \frac{p}{2G} \sigma_{ij}(0) + \frac{p}{2G} \sigma_{ij}(0)$$

Es decir

$$p \epsilon_{ij}^* = \left(\frac{p}{2G} + \frac{1}{2\eta} \right) \sigma_{ij}^*$$

La función de fluencia transformada es, pues,

$$f^*(p) = \frac{1}{2G} + \frac{1}{2\eta p}$$

que origina

$$f(t) = \frac{1}{2G} + \frac{t}{2\eta}$$

Como

$$r^*(p) = \frac{1}{f^*} = \frac{2Gp}{p + G/\eta} ; r(t) = G \cdot e^{-\frac{G}{2} t}$$

que es la ecuación ya obtenida en el capítulo anterior para $t_0 = 0$.

Modelos reológicos lineales

En las componentes esféricas del cuerpo de KELVIN

$$\sigma_{ij}^0 = 3K \epsilon_{ij}^0 + 3\eta \dot{\epsilon}_{ij}^0$$

$$\sigma_{ij}^* = 3K \epsilon_{ij}^* + 3p \rho \dot{\epsilon}_{ij}^*$$

es decir

$$r^*(p) = 3K + 3p\eta \quad ; \quad r(t) = 3K + 3\eta \delta(t)$$

$$f^* = \frac{1}{r^*} = \frac{1}{3K + 3\eta p} \quad f(t) = \frac{1}{3K} \left(1 - e^{-\frac{K}{\eta} t} \right)$$

3.5. LA TRANSFORMADA DEL CONTINUO VISCOELASTICO ISOTROPO

En el apartado anterior vimos la posibilidad de relacionar la tensión y la deformación mediante una función de fluencia $\epsilon(t) = \epsilon_0 f(t)$ o una función de relajación $\sigma(t) = \sigma_0 r(t)$.

En el caso de un medio continuo, las relaciones entre tensiones y deformaciones son lineales

$$\begin{cases} \sigma_x = r_x^x \epsilon_x + r_y^x \epsilon_y + r_z^x \epsilon_z + r_{xy}^x \gamma_{xy} + r_{xz}^x \gamma_{xz} + r_{yz}^x \gamma_{yz} \\ \sigma_y = r_x^y \epsilon_x + r_y^y \epsilon_y + \dots \\ \sigma_z = \dots \\ \tau_{xy} = \dots \\ \tau_{xz} = \dots \\ \tau_{yz} = \dots \end{cases} \quad \text{etc.}$$

Por consideraciones análogas a las establecidas en Elasticidad se prueba que, en el caso del continuo isotropo, todas las funciones de relajación se pueden reducir a dos (análogamente para las de fluencia).

Por ello, se pueden obtener relaciones formalmente análogas a las de LAME

$$\sigma_{ij}(t) = \lambda(t) \cdot \theta \delta_{ij} + 2G(t) \epsilon_{ij} \quad \left| \begin{array}{l} \epsilon_{ij} \text{ constante} \\ \theta = \epsilon_{ii} \\ \lambda, G \text{ funciones de relajación.} \end{array} \right.$$

Modelos reológicos lineales

o bien se actúa con un estado σ_{ij} constante

$$\epsilon_{ij}(t) = \frac{\alpha(t)}{2} \sigma_{ij} - \frac{3}{2} \beta(t) \sigma_m \delta_{ij} \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_m = \sigma_{ii}/3 \\ \alpha, \beta \text{ funciones de fluencia.} \end{array} \right.$$

Las funciones de fluencia y relajación que aparecen se pueden determinar con el ensayo de tracción, por ejemplo.

$$\begin{array}{l} \text{Si se hace un ensayo de fluencia a tracción} \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{ii} = cte \\ \sigma_{ij} = 0 \\ \sigma_m = \frac{\sigma_{ii}}{3} \end{array} \right. \\ \epsilon_{ii} = \frac{\alpha}{2} \sigma_{ii} - \frac{3}{2} \beta \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\alpha - \beta}{2} \sigma_{ii} = A \sigma_{ii} \quad \left| \begin{array}{l} A = \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\epsilon_{ii}}{\sigma_{ii}} \\ \beta = -\frac{2 \epsilon_{22}}{\sigma_{ii}} \end{array} \right. \\ \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{3}{2} \beta \frac{\sigma_{ii}}{3} = -\frac{1}{2} \beta \sigma_{ii} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{si se realiza otro de relajación} \quad \left| \begin{array}{l} \epsilon_{ii} = cte \\ \sigma_{ii} \neq 0 \\ \sigma_{ij} = 0 \end{array} \right. \\ \sigma_{ii} = \lambda \theta + 2G \epsilon_{ii} \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{ii} = 3\lambda \theta + 2G \theta = (3\lambda + 2G) \theta \\ \theta = \frac{\sigma_{ii}}{3\lambda + 2G} \end{array} \right. \\ 0 = \lambda \theta + 2G \epsilon_{22} \\ 0 = \lambda \theta + 2G \epsilon_{33} \end{array}$$

$$\sigma_{ii} = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \epsilon_{ii} = E \epsilon_{ii}$$

$$\epsilon_{22} = -\frac{\lambda \theta}{2G} = -\frac{\lambda}{2G} \frac{G(3\lambda + 2G)}{(3\lambda + 2G)(\lambda + G)} \epsilon_{ii} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \epsilon_{ii} = -\nu \epsilon_{ii}$$

análogas a la obtenida en elasticidad.

Los tensores aplicados antes en el segundo miembro de las ecuaciones de LAME eran constantes. Si son funciones de t deben utilizarse las funciones integrales definidas en el apartado 3¹.

Es decir, las relaciones tensiones-deformaciones en el continuo viscoelástico isótropo son

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \frac{d}{dt} \int_0^t \lambda(u) \cdot \theta(t-u) du + 2 \frac{d}{dt} \int_0^t G(u) \cdot \epsilon_{ij}(t-u) du.$$

- 1) Para mas detalles puede consultarse: E. VOLTERRA: "On elastic continua with hereditary Characteristics" Journ. App. Mech". Septiembre 1951.

Modelos reológicos lineales

en función de las relaciones de relajación λ , ζ , o bien

$$\epsilon_{ij} = -\frac{3}{2} \delta_{ij} \frac{d}{dt} \int_0^t \beta(u) \sigma_m(t-u) du + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t \alpha(u) \sigma_{ij}(t-u) du$$

en función de las relaciones de fluencia β y α .

Al aplicarlas la transformación de CARSON-LAPLACE obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* &= \lambda^*(p) \theta^* \delta_{ij} + 2 \zeta^*(p) \cdot \epsilon_{ij}^* ; (\theta^* = \epsilon_{ii}^*) \\ \epsilon_{ij}^* &= \frac{\alpha^*(p)}{2} \sigma_{ij}^* - \frac{3}{2} \beta^*(p) \sigma_m^* \delta_{ij} ; (\sigma_m^* = \frac{\sigma_{ii}^*}{3}) \end{aligned}$$

Puesto que la relación entre las transformadas es formalmente análoga a las establecidas al comienzo de este párrafo, se pueden definir las cantidades A^* , E^* , ν^* , etc. que tendrán el mismo significado que en la elasticidad tradicional.

Así se llega a generalizar la relación $f^* \cdot r^* = 1$ del apartado 3.4. Ahora se obtiene

$$\alpha^* \zeta^* = 1$$

El lector puede comprobar también $A^* E^* = 1$.

$$\nu^* = \frac{\lambda^*}{2(\lambda^* + \zeta^*)} , \quad \beta^* = 2\nu^* A^* = \nu^* (\alpha^* - \beta^*)$$

$$3 \sigma_m^* = (3\lambda^* + 2\zeta^*) \theta^* = \frac{E^*}{1-2\nu^*} \theta^* \dots \text{etc}$$

Ejemplo

La flecha en el centro de una viga sobre dos apoyos separados L , sometida a carga repartida q es (véase vg.: COURBON)

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{q L^4}{E I} \quad \left| \begin{array}{l} E \text{ Modulo elasticidad} \\ I \text{ Momento de inercia} \end{array} \right.$$

Se trata de estudiar la que se produce en función del tiempo si se admite que el material se comporte como

Modelos reológicos lineales

un líquido viscoso incompresible.

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij}$$

Si $\theta = 0$, $\sigma_m = -P$ y la transformada de la anterior

$$\boxed{\sigma_{ij}^* = \sigma_m^* \delta_{ij} + 2p\eta \epsilon_{ij}^*}$$

$$G^*(p) = p\eta ; \lambda^* = \infty ; \nu^* = \frac{1}{2}$$

$$E^* = 3p\eta ; [E^* = 2(1+\nu^*)G^*]$$

Así pues $\delta^* = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{E^*I} = \frac{5}{1152} \frac{qL^4}{p\eta I}$

y deshaciendo el cambio

$$\boxed{\delta(t) = \frac{5}{1152} \frac{qL^4}{2I} t}$$

4 PLASTICIDAD

4.1. - INTRODUCCION

En el capítulo I vimos algunos criterios que intentaban predecir cuándo se alcanzaba el estado plástico al incrementarse las tensiones. Tomando como base el ensayo de tracción, todos ellos se podían reducir a una expresión del tipo

$$f(\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \epsilon_{xy}; \epsilon_{xz}; \epsilon_{yz}) \leq \sigma_e$$

La plasticidad se alcanzaba cuando

$$F = f - \sigma_e = 0$$

El valor de σ_e puede no ser constante. Por ejemplo, en el acero ya vimos que dependía de que el diagrama de carga fuese o no el noval. Para simplificar prescindiremos de los cuerpos que se endurecen con la progresiva plastificación y nos limitaremos al estudio del cuerpo elastoplástico perfecto y del rigidoplástico perfecto. En estos si Q designa una tensión y q una deformación el valor de σ_e no se altera. En el cuerpo elastoplástico, (la deformación plástica es \bar{q})

$$\left\{ \begin{array}{ll} Q_{\min} < Q < Q_{\max} & q = EQ \\ Q = Q_{\max} & q = EQ_{\max}; \dot{q} \geq 0 \\ Q = Q_{\min} & q = EQ_{\min}; \dot{q} \leq 0 \end{array} \right.$$

1) Al final del capítulo damos algunas notas sobre ellos.

Plasticidad

Las condiciones en $\dot{\bar{q}}$ indican que la deformación plástica aumenta o disminuye sin cesar cuando se ha alcanzado el valor límite de Q .

$$\begin{array}{l|l} \text{En el cuerpo rígido plástico} & Q_{\min} < Q < Q_{\max} \\ \text{no hay deformación elástica} & Q = Q_{\max} \\ \text{y } \dot{q} = \dot{\bar{q}} & Q = Q_{\min} \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{\bar{q}} = 0 \\ \dot{\bar{q}} > 0 \\ \dot{\bar{q}} < 0 \end{array}$$

4.2. EL DOMINIO DE ELASTICIDAD

Conviene introducir ahora una nueva representación de los tensores de tensión y velocidad de deformación. Para ello imaginaremos un espacio de 9 dimensiones $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy})$ en el que cada estado de tensión vendrá asociado a un vector \vec{OP} . La función $F = f - \sigma_e = 0$ definida en el apartado anterior representa una superficie en dicho espacio. Es la llamada superficie de carga o superficie de fluencia. Como hemos supuesto σ_e fija, la superficie es fija y además contiene al origen, pues $f(0) = 0$.

El interior de la superficie es llamado dominio de elasticidad \mathcal{E} en virtud de que en cualquier estado para el que $F < 0$, $f < \sigma_e$ y por consiguiente la situación es elástica.

Si el punto representativo del estado de tensión se encuentra en la superficie hay deformación plástica, pero no puede precisarse cómo se efectúa.

Si después de alcanzada la superficie de fluencia el punto se traslada de nuevo a \mathcal{E} , el comportamiento es elástico, pero se mantiene la deformación plástica previa. Es decir, la deformación total es

$$q = E Q + \bar{q} \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \text{deformación total} \\ E = \text{módulo de elasticidad} \\ Q = \text{carga actuante} \\ \bar{q} = \text{deformación plástica} \end{array} \right.$$

Plasticidad

Según todo lo anterior la función F toma siempre valores negativos o nulos, y los valores positivos carecen de significado físico. Son imposibles.

A veces el dominio de elasticidad está definido por un sistema de superficies

$$F_i(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \tau_{xy}, \dots) = 0 \quad ; (i = 1, 2, \dots, n)$$

Habría deformación plástica si se cumple al menos una de esas ecuaciones. Los puntos comunes a varias superficies son puntos singulares, como veremos inmediatamente

Si el cuerpo es rígido-plástico $q = \bar{q}$ y el dominio \mathcal{E} es dominio de rigidez.

4.3. LA POTENCIA DE DISIPACION ESPECIFICA Y EL TEOREMA DE HILL EN LOS CUERPOS RIGIDOPLASTICOS

Se llama así a la expresión

$$\mathcal{D} = \sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \sigma_z \dot{\epsilon}_z + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} + \dots$$

Si las deformaciones son plásticas esta potencia es transformada en calor y de ahí su nombre. Como hay que realizar trabajo para deformar el cuerpo \mathcal{D} es esencialmente positiva.

Si se llama $\overline{OP} = (\sigma_x; \sigma_y; \dots)$ y $\overline{OQ} = (\dot{\epsilon}_x; \dot{\epsilon}_y; \dots)$ se puede expresar $\mathcal{D} = \overline{OP} \cdot \overline{OQ}$.

Además, la potencia de disipación está relacionada con la posibilidad de un estado plástico a través del teorema de la potencia disipación máxima o teorema de HILL, que no demostraremos. Su expresión es "Durante la deformación plástica caracterizada por las velocidades de deformación \overline{OQ} , el estado de tensión que se produce hace máxima la potencia de disipación específica."

Se debe hacer máximo a \mathcal{D} , sabiendo que \overline{OP} debe encontrarse sobre la superficie F . Según sabemos el problema se resuelve anulando las derivadas de

$$\sum \sigma_i \dot{\epsilon}_i - \lambda F(\sigma_i)$$

(recuérdese que en este caso $\dot{\epsilon}_i = \dot{\bar{\epsilon}}_i$)

Plasticidad

Es decir, el teorema de HILL implica las siguientes condiciones

$$\dot{\epsilon}_i = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \quad (i=1,2,\dots,9)$$

o bien, explicitando los índices

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \\ \dot{\epsilon}_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \\ \dot{\epsilon}_z = \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \\ \dot{\gamma}_{xz} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} \\ \dot{\gamma}_{yz} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} \end{cases} \dots \text{ y simétricos}$$

estas expresiones suelen ser conocidas como ley de la fluencia plástica y expresan claramente que $\overline{OQ} = (\dot{\epsilon}_x; \dot{\epsilon}_y; \dots)$ es normal al plano tangente en P a F.

Por otro lado si la potencia $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ es máxima, al escoger cualquier punto M distinto a P

$$\delta - \delta' = \overline{OP} \cdot \overline{OQ} - \overline{OM} \cdot \overline{OQ} \geq 0$$

Es decir $\overline{MP} \cdot \overline{OQ} \geq 0$ y, en consecuencia, el dominio \hat{E} está siempre del mismo lado respecto al plano tangente a la superficie F, es decir, el dominio de elasticidad es convexo.

$$\text{Observando que } \delta = \sum \sigma_i \dot{\epsilon}_i = \lambda \sum \sigma_i \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} = \lambda \overline{OP} \cdot \overline{VF}$$

Como \hat{O} es interior a F $\overline{OP} \cdot \overline{VF}$ es siempre positivo y al serlo D, λ es positivo también

Puede suceder que la normal en la zona en estudio no sea única. El plano tangente no es único pero como puede ser cualquiera que no corte a la superficie, \overline{OQ} está en el cono de las paralelas a las normales trazadas por O.

Si existe una zona plana hay varios estados de tensión compatibles con \overline{OQ} pero todos ellos dan el mismo valor de D. Es decir, la potencia de disipación solo es función de las $\dot{\epsilon}$ $\delta = \delta(\dot{\epsilon}_x; \dot{\epsilon}_y; \dots; \dot{\gamma}_{xy}; \dots)$

Todos los resultados citados son válidos para el cuerpo elastoplástico, cuidando de sustituir las $\dot{\epsilon}_i$ por $\dot{\epsilon}_i$. Ello es lógico si se piensa que las

Plasticidad

deformaciones elásticas son muy pequeñas y al alcanzarse el estado plástico no ha habido prácticamente cambio de forma. Por ejemplo, en una barra de acero de 5.000 Kg/cm². de límite elástico la deformación sería

$$\epsilon^c = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\sigma}{E} = \frac{5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} \approx 25 \cdot 10^{-3}$$

Es decir a una longitud 100 le correspondería un alargamiento elástico $\Delta L = 0,25$ (recuérdese que ésta era también la base para aceptar la definición de ϵ^c , referida a L_0).

Otra cuestión muy importante es ver que si damos unos incrementos de tensión $\delta \sigma_i$, en el curso de la deformación plástica no producen trabajo.

$$\text{De } F = 0 \text{ obtenemos } \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \delta \sigma_i = 0 \quad (9 \text{ sumandos})$$

Si se ponen las condiciones de deformación plástica ello conduce a $\frac{1}{\lambda} \dot{\epsilon}_i \delta \sigma_i = 0$ y como $\dot{\epsilon}_i = \partial \epsilon_i / \partial t$ se obtiene como anunciábamos.

$$\delta \epsilon_i \delta \sigma_i = 0$$

4.4. LAS CONDICIONES DE PLASTICIDAD DE MISES Y TRESCA

Si el cuerpo es isótropo la condición de plasticidad es independiente de los ejes y, por tanto, puede ponerse como función de las tensiones principales

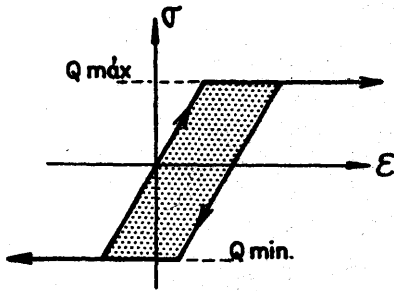
$$F(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = 0$$

lo que facilita la representación. La ley de fluencia plástica es así:

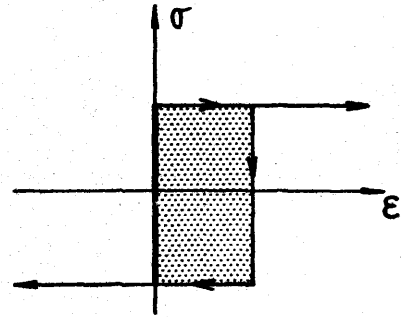
$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_I &= \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_I} \\ \dot{\epsilon}_{II} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{II}} \\ \dot{\epsilon}_{III} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{III}} \end{aligned}$$

Si se admite, además, que la condición sólo depende del desviador (y por tanto de los invariantes I_2, I_3), se podrá escribir $F(I_2, I_3) = 0$.

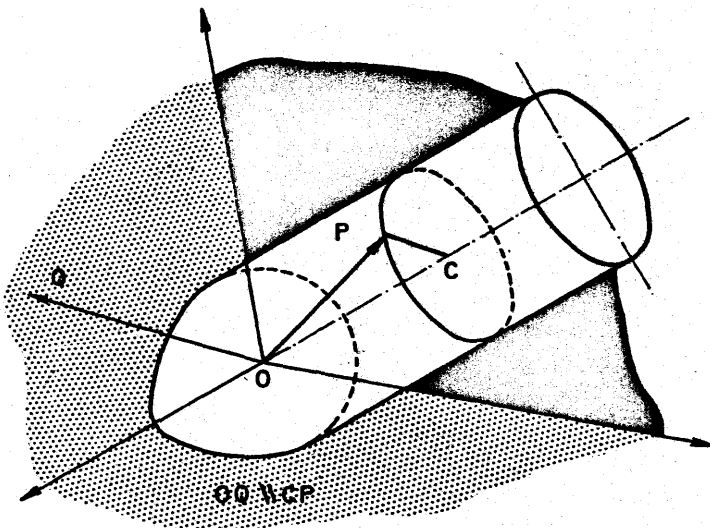
Plasticidad



EL CUERPO ELASTOPLASTICO



EL CUERPO RIGIDO-PLASTICO



EL CRITERIO DE VON-MISES

Plasticidad

En este caso F es un cilindro de eje $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ ya que si $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \in E$ también lo está

$$(\sigma_I + k; \sigma_{II} + k; \sigma_{III} + k) \quad \forall k$$

La más sencilla condición es $I_2 = a^2$ que es la de MISES y conduce a la ley de MISES-LEVY

Como
$$I_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2], \quad R = a\sqrt{2} \quad \dot{\epsilon}_i = \lambda \frac{\sigma_i}{\bar{\sigma}}$$

La potencia de disipación es $D = \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = R/\overline{OQ} = a\sqrt{2}/\overline{OQ}$ que como según advertimos solo depende de \overline{OQ}

En cuanto al criterio de TRESCA la superficie de fluencia venía definida por la condición de que el radio del círculo de MOHR fuera inferior a un valor b .

En tensiones principales ello implica 6 condiciones

$$\sigma_I - \sigma_{III} = 2b$$

$$\sigma_{III} - \sigma_I = 2b$$

$$\sigma_{II} - \sigma_{III} = 2b$$

$$\sigma_{III} - \sigma_{II} = 2b$$

$$\sigma_{III} - \sigma_I = 2b$$

$$\sigma_I - \sigma_{II} = 2b$$

que representan un cilindro coaxial con el de MISES e inscrito en él. En la proyección isométrica es un hexágono regular de lado

$$\frac{2}{3} b \sqrt{6}$$

La ley de deformación variará según el número de condiciones que se cumplan. Si solo se cumple la primera es

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_I = \lambda \\ \dot{\epsilon}_{II} = 0 \\ \dot{\epsilon}_{III} = -\lambda \end{array} \right\} \lambda > 0$$

Si se cumplen la primera y la sexta

$$\dot{\epsilon}_I = \lambda + \mu \quad \dot{\epsilon}_{II} = -\mu \quad \dot{\epsilon}_{III} = -\lambda \quad (\lambda > 0, \mu > 0) \quad \text{etc}$$

La curva intrínseca es una generalización de la anterior en la que se supone que $\rho = f(\bar{\sigma})$ donde ρ es el radio del círculo de MOHR y $\bar{\sigma}$ la abscisa de su centro.

Plasticidad

4.5. TEOREMAS DE ACOTACION. UNICIDAD.

Durante el proceso de plastificación se verifican tres condiciones:

a) Equilibrio

Las fuerzas actuantes y el sistema de tensiones internas ocasionadas por ellas están en equilibrio estático.

b) Compatibilidad

Las deformaciones que toma el cuerpo son congruentes con los enlaces al resto del Universo.

c) Fluencia

En todo punto se cumple que la tensión es inferior o a lo sumo igual, a la de fluencia.

Evidentemente se puede pensar en solicitaciones que cumplan sólo algunas de las condiciones anteriores. Sobre ello vamos a tratar demostrando que, la solución al problema plástico es única y se puede acotar superior e inferiormente.

Previamente, vamos a establecer la expresión del teorema de HILL en función de las fuerzas y las velocidades de deformación.

Convendremos en que el sólido se encuentra sometido a un estado de carga proporcional, es decir, si en un instante las fuerzas son F_t , posteriormente valen λF_t siendo λ un número positivo. Valores especiales de λ son aquel para el que aparece la fluencia en, por lo menos un punto, λ^1 y el que provoca el colapso del cuerpo como estructura resistente λ^* . Es claro que $\lambda^* \geq \lambda^1$.

Sean (F_1^*, σ_1^*) el sistema en equilibrio, y $(\delta u_i^*, \delta \epsilon_i^*)$ el conjunto compatible de deformaciones. El teorema de

Plasticidad

los trabajos virtuales permite escribir

$$\sum F_i^* \delta u_i^* = \int_V \sigma_i^* \delta \epsilon_i^* dv$$

Si ahora se escoge otro sistema F_i^1 que no produzca el estado límite $\lambda F_i^1 = F_i^*$, $\lambda > 1$ al aplicar el teorema con fuerzas falsas y deformaciones reales

$$\sum F_i^1 \delta u_i^* = \int_V \sigma_i^1 \delta \epsilon_i^* dv$$

Si el cuerpo es rígido plástico

$$\int_{V^*} \sigma_i^1 \delta \epsilon_i^* < \int_{V^*} \sigma_i^* \delta \epsilon_i^* dv$$

pues

- a) V^* es el trozo de cuerpo plastificado (en el resto no hay desplazamiento)
- b) En todo V^* , σ_i^* cumple la condición de fluencia y σ_i^1 no

En consecuencia

$$\sum F_i^* \delta u_i^* > \sum F_i^1 \delta u_i^*$$

Pero en función de las velocidades $\delta u_i^* = v_i^* \delta t$ y por ello

$$\sum F_i^* v_i^* > \sum F_i^1 v_i^*$$

que es la forma que deseábamos para el principio del trabajo plástico máximo.

Ahora ya se pueden demostrar los teoremas de GREENBERG, PRAGER y DRUCKER.

- (I) El teorema estático establece que, si sobre un cuerpo rígido plástico, actúa un sistema de fuerzas F_i que cumpla las condiciones de equilibrio y fluencia, no se produce deformación alguna.

Plasticidad

- (II) El teorema cinemático asegura que para todo sistema de fuerzas que produzca la condición de fluencia y un sistema de velocidades compatible se produce necesariamente deformación.

Ambos teoremas se suelen demostrar por reducción al absurdo.

Para ver el primero admitamos que hay desplazamiento con el sistema F_i . Si hay movimientos se puede encontrar un $\rho \leq 1$ tal que con ρF_i también los habría. El teorema de HILL permitirá escribir

$$\sum \rho F_i \cdot v_i > \sum F_i v_i$$

$\rho > 1$ en contra de lo supuesto

Respecto al segundo conviene observar que todo campo de velocidades implica que la potencia suministrada por las fuerzas es superior a la potencia disipada, es decir

$$\sum F_i v_i > \int_V \mathcal{D}(\dot{\epsilon}) dv$$

Si el teorema es falso no habrá deformación. Con el teorema de los trabajos virtuales

$$\sum F_i v_i = \int_V \sigma' \dot{\epsilon} dv$$

Al no existir deformación $\sigma' \dot{\epsilon} \leq \mathcal{D}(\dot{\epsilon})$ y

$$\sum F_i v_i < \int_V \mathcal{D}(\dot{\epsilon}) dv$$

en contra de la hipótesis

Si pensamos de nuevo en que el estado de carga es proporcional y F_i son los valores iniciales el primer teorema se puede interpretar como $\lambda_{st} F_i \leq \lambda^* F_i$ y el segundo como $\lambda_{cin} F_i \geq \lambda^* F_i$, es decir, el factor de proporcionalidad crítico está acotado

$$\lambda_{st} \leq \lambda^* \leq \lambda_{cin}.$$

y por consiguiente cuando se cumplan las tres condiciones establecidas al principio del párrafo se ha conseguido la solución.

Plasticidad

4.6. EL EQUILIBRIO ELASTOPLASTICO. ECUACIONES DE PRANDTL-REUSS

Una vez que se inicia la fluencia coexistente en el cuerpo las deformaciones elásticas y plásticas hasta que se plastifican zonas suficientes para que las deformaciones crezcan sin necesidad de aumentar las cargas. En ese momento el sólido ha perdido su caracter resistente frente a las fuerzas exteriores y se dice que se ha transformado en un mecanismo.

Vamos a establecer las relaciones de equilibrio en ambos estados, suponiendo que la deformación plástica sigue la ley de VON MISES, es decir, que en la deformación plástica no hay cambios de volumen.

Según ello la variación de la componente esférica ϵ^o del tensor deformación es elástica, es decir

$$\left| \delta \epsilon_{ij}^o = \frac{1-2\nu}{E} \delta \sigma_{ij}^o \right.$$

Respecto a la componente desviadora (ver apartado 4)

$$\delta \epsilon_{ij} = \delta \epsilon_{ij}^d - (\delta \epsilon_{ij}^o) \delta_{ij} \quad \left| \begin{array}{l} \delta \epsilon_{ij}^d = \sigma_{ij}^d \delta \lambda + \frac{1+\nu}{E} \delta \sigma_{ij}^d \quad \text{si } (\delta I_2 = 0) \\ \delta \epsilon_{ij}^d = \frac{1+\nu}{E} \delta \sigma_{ij}^d \quad \text{si } (\delta I_2 < 0) \end{array} \right.$$

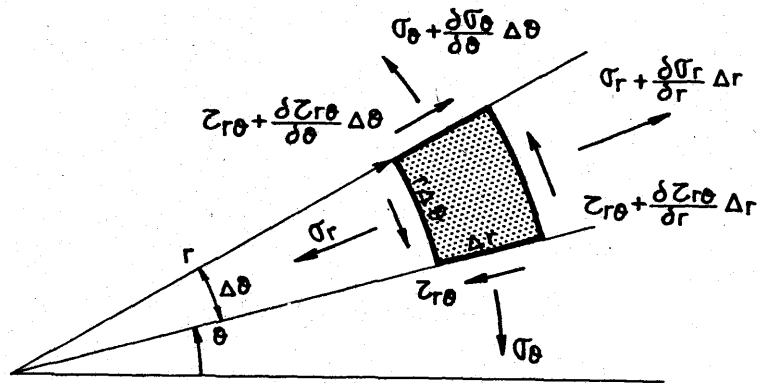
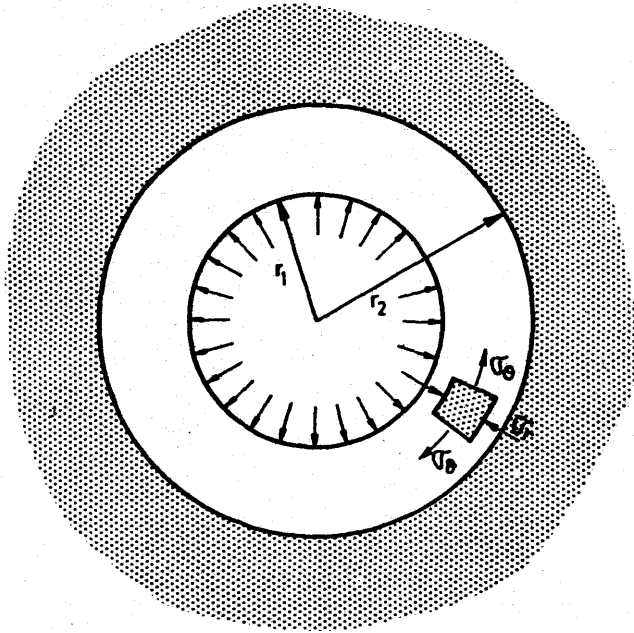
que son las ecuaciones de PRANDTL-REUSS.

Como σ_{ij} es constante en la deformación, y las zonas elásticas contienen la fluencia, las deformaciones plásticas son pequeñas, por lo que al integrar se obtiene

$$\left| \begin{array}{l} \epsilon_{ij}^d = \left(1 + \frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{ij}^d \quad (I_2 = a^2) \\ \epsilon_{ij}^d = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}^d \quad (I_2 < a^2) \end{array} \right. \quad \lambda > 0$$

que son las relaciones de HENKY.

EL PROBLEMA DE LA PLASTIFICACION DEL ANILLO DELGADO



$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{z_{r\theta}}{r} = 0 \end{cases}$$

Por simetria $\begin{cases} z_{r\theta} = 0 \\ \sigma_\theta = \text{cte} \end{cases}$

Plasticidad

Una vez que se ha alcanzado la fluencia, las deformaciones plásticas crecen, y frente a ellas se pueden despreciar las elásticas. Se siguen, sin embargo, cumpliendo las condiciones de

$$\begin{array}{ll}
 \text{equilibrio} & \sum \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \\
 \text{compatibilidad} & 2\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \lambda \sigma_{ij} \quad \left(v_i = \dot{u}_i \right. \\
 & \quad \left. \text{velocidades} \right) \\
 \text{fluencia} & I_2 = 'a^2
 \end{array}$$

Como ejemplo se puede ver el caso del anillo (r sometido a presión interior. Los radios interior y exterior son r_1 y r_2 respectivamente. Las tensiones tangenciales son nulas por simetría. Proyectando según el radio y la tangente se obtiene

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Es decir σ_θ permanece constante como era de esperar y

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

La condición de VON MISES es

$$\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta = \sigma_e^2$$

o bien

$$3(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r + \sigma_\theta)^2 = 4\sigma_e^2$$

lo que facilita el cambio

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r + \sigma_\theta = 2\sigma_e \sin \varphi \\ \sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2\sigma_e}{\sqrt{3}} \cos \varphi \end{array} \right. \\
 \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{2\sigma_e}{\sqrt{3}} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \\ \sigma_\theta = \frac{2\sigma_e}{\sqrt{3}} \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) \end{array} \right. \quad \left(\sigma_r = 0 \text{ para } \varphi = -\frac{\pi}{6} \right. \\
 \quad \left. \text{contorno exterior} \right)
 \end{array}$$

es decir, sustituyendo en la ecuación de equilibrio,

$$\left(\cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi \right) \frac{d\varphi}{dr} + \frac{2}{r\sqrt{3}} \cos \varphi = 0$$

Plasticidad

$\varphi = -\frac{\eta}{6}$ Integrando con la condición $\sigma_{r2} = 0$ para se obtiene

$$r^2 = \frac{r_2^2 \sqrt{3}}{2 \cos \varphi} e^{-\sqrt{3}(\frac{\eta}{6} + \varphi)}$$

Si $\varphi = \psi$

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \psi e^{\sqrt{3}(\frac{\eta}{6} + \psi)} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}$$

permite obtener el valor ψ que provoca la plastificación y como $\sigma_{r1} = p =$ presión interior.

$$\boxed{p = \frac{2\sigma_e}{\sqrt{3}} \sec\left(\psi + \frac{\eta}{6}\right)}$$

4.7. EL PROBLEMA DE LA ACRTUD. ENDURECIMIENTOS ISOTROPICO Y CINEMATICO.

Hasta ahora no hemos considerado la posibilidad del endurecimiento por plastificación. En el caso general el comportamiento del material se obtiene dando

- 1) Una condición de fluencia inicial, dando el límite elástico.
- 2) Una regla de fluencia que relacione los incrementos de la deformación plástica a las tensiones y a los incrementos de tensión.
- 3) Una ley de endurecimiento que establezca las condiciones de sucesivas fluencias desde cualquier estado plástico.

Esta ley será del tipo $f(\sigma_{ij}; \alpha_{ij}) = 0$, donde σ_{ij} mide el grado de endurecimiento. Como

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij}$$

Plasticidad

- $f=0$ representa un estado plástico
- $f<0$ representa un estado elástico
- $f>0$ representa estados imposibles
- $df<0$ representa descarga desde un estado plástico a otro elástico.

Si la descarga es elástica $d\alpha_{ij}=0$ y la condición de descarga es

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$$

Para un material rígido plástico la f es función de las σ_{ij} exclusivamente, por lo que cualquier cambio en las tensiones durante la fluencia cumple

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$$

Es decir, según sabemos, el vector incremento de tensión es tangencial a la superficie de carga. Cuando

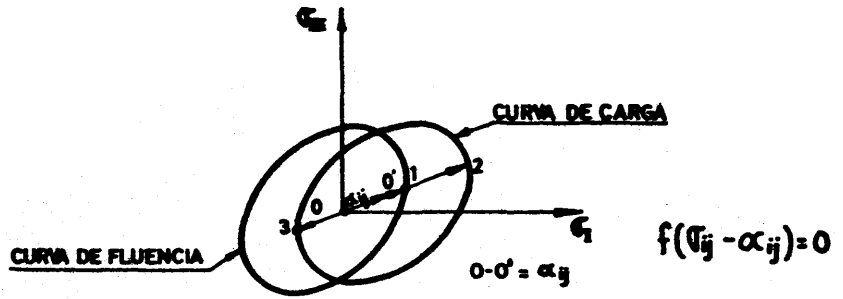
$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$$

debe existir necesariamente deformación por paso de un estado plástico a otro. Es lo que PRAGER llama "consistent loading".

Se han propuesto varios tipos de leyes para reflejar el endurecimiento. La más atractiva es la debida a PRAGER que intenta representar el efecto BAUSCHINGER. Si se representa la elipse de MISES en el plano (σ_1, σ_{II}) se admite que el paso de un punto 1 a otro 2 se realiza mediante una traslación de la elipse como cuerpo rígido. Si $OO' = \alpha_{ij}$ la condición sería $f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0$

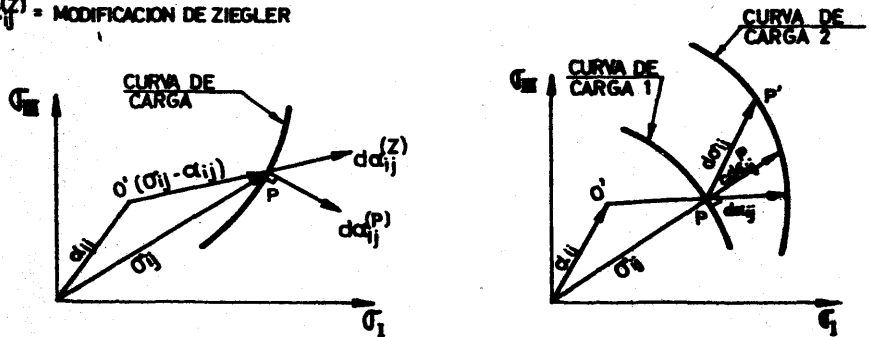
Si $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha_{ij}$ la condición de MISES se escribe

$$f(\sigma_{ij}; \alpha_{ij}) = \bar{\sigma}_x^2 + \bar{\sigma}_y^2 + \bar{\sigma}_z^2 - \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_y \bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_z \bar{\sigma}_x + 3\bar{\epsilon}_{xy}^2 + 3\bar{\epsilon}_{yz}^2 + 3\bar{\epsilon}_{xz}^2 - \sigma_e^2 = 0$$



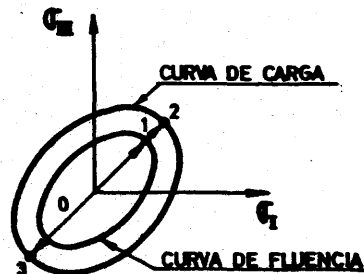
ENDURECIMIENTO CINEMATICO

$d\alpha_{ij}^{(P)}$ = ENDURECIMIENTO CINE-
MATICO DE PRAGER
 $d\alpha_{ij}^{(Z)}$ = MODIFICACION DE ZIEGLER



COMPARACION DE LA REGLA DE PRAGER
CON LA MODIFICACION DE ZIEGLER

REGLA DE ENDURECIMIENTO CON
LA MODIFICACION DE ZIEGLER



ENDURECIMIENTO ISOTROPICO

Plasticidad

La teoría del endurecimiento cinemático postula que los incrementos de traslación de la superficie de fluencia ocurren en la dirección de las normales a la superficie

Puesto que esto supone algunas inconsistencias ZIEGLER¹ propone $d\sigma_{ij} = d\mu(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})$; $d\mu > 0$ lo que significa que en lugar de tomar la normal, el incremento de traslación se dirige desde el centro de la superficie de carga.

La condición de fluencia es

$$(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0$$

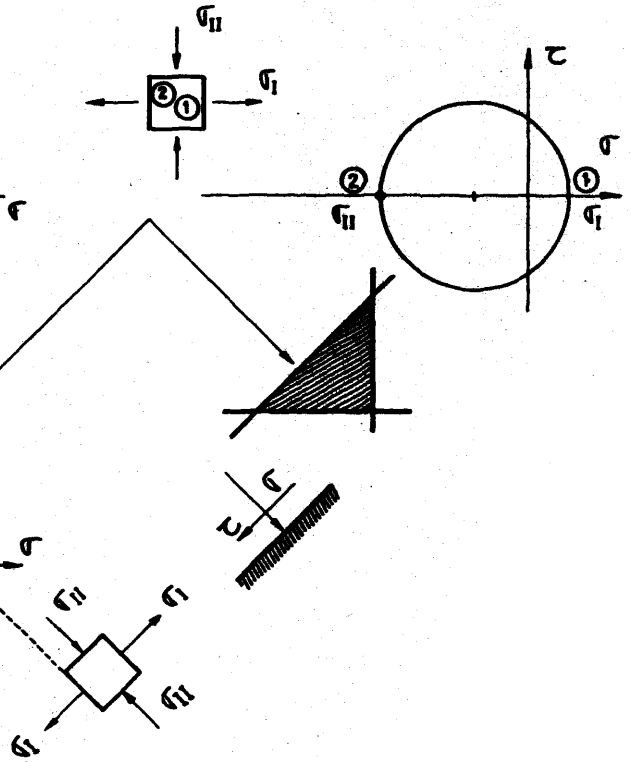
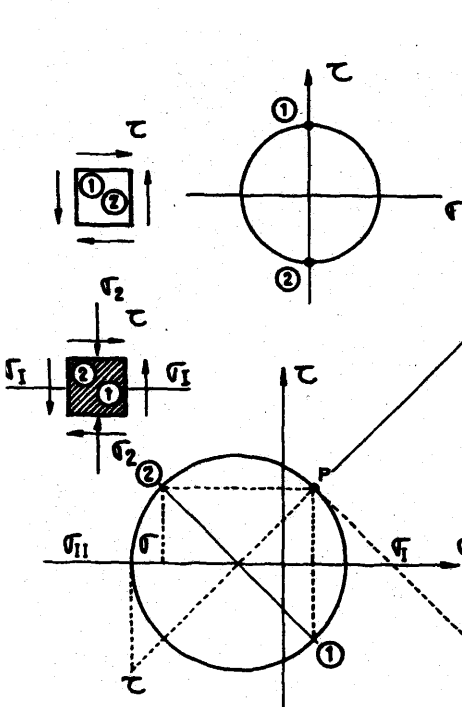
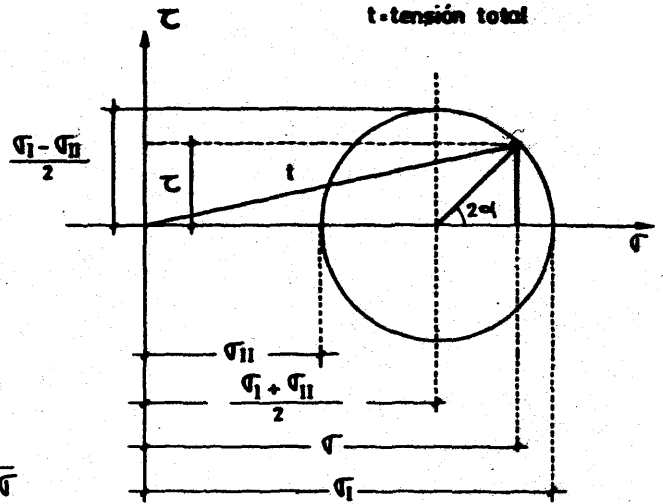
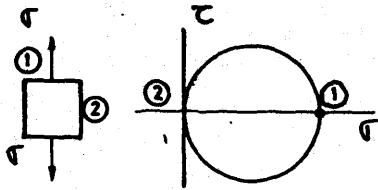
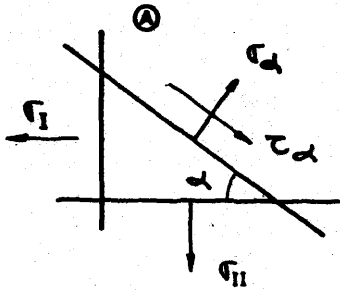
lo que

determina

$$d\mu = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}$$

La teoría del endurecimiento isotrópico admite que la elipse se expande uniformemente desde el origen, manteniendo la misma forma, centro y orientación. Es decir, no se tiene en cuenta el efecto BAUSCHINGER, pero por su sencillez puede servir para fenómenos en los que no se produzca la inversión de signos en las tensiones.

1) "A modification of Prager hardening rule"
Quart. Appl. Math. Vol. 17 N° 1, 1959.



APENDICE 1

CIRCULO DE MOHR

Se pretende conseguir una construcción gráfica que relacione los distintos valores del vector tensión según la orientación escogida.

En el caso plano, y según se desprende de la figura

$$\begin{cases} A\sigma_{\alpha} = \sigma_I (A \sin \alpha) \sin \alpha + \sigma_{II} (A \cos \alpha) \cos \alpha \\ A\tau_{\alpha} = \sigma_I (A \sin \alpha) \cos \alpha - \sigma_{II} (A \cos \alpha) \sin \alpha \end{cases}$$

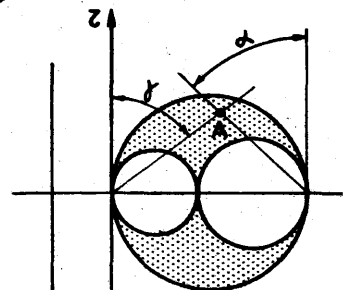
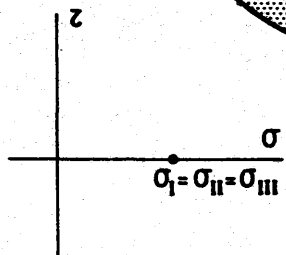
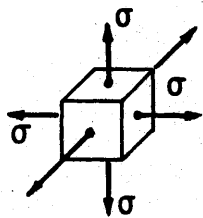
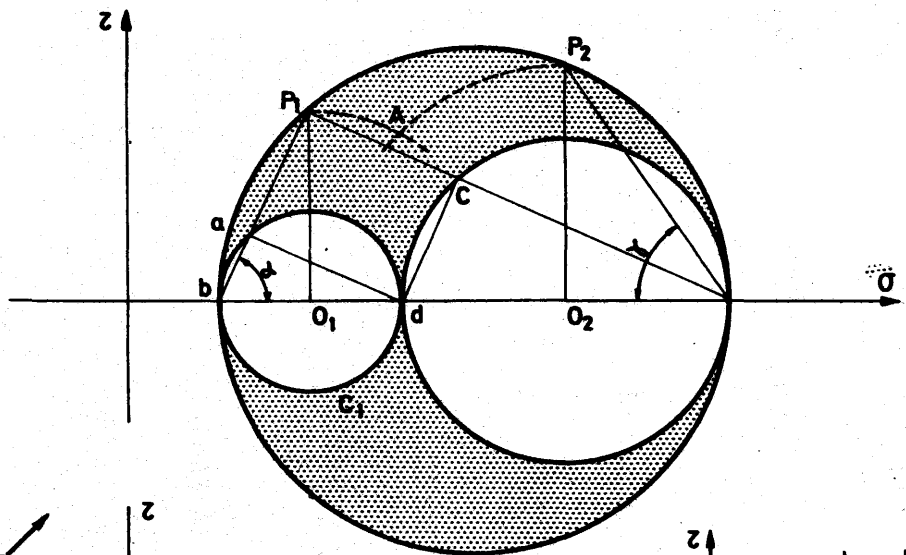
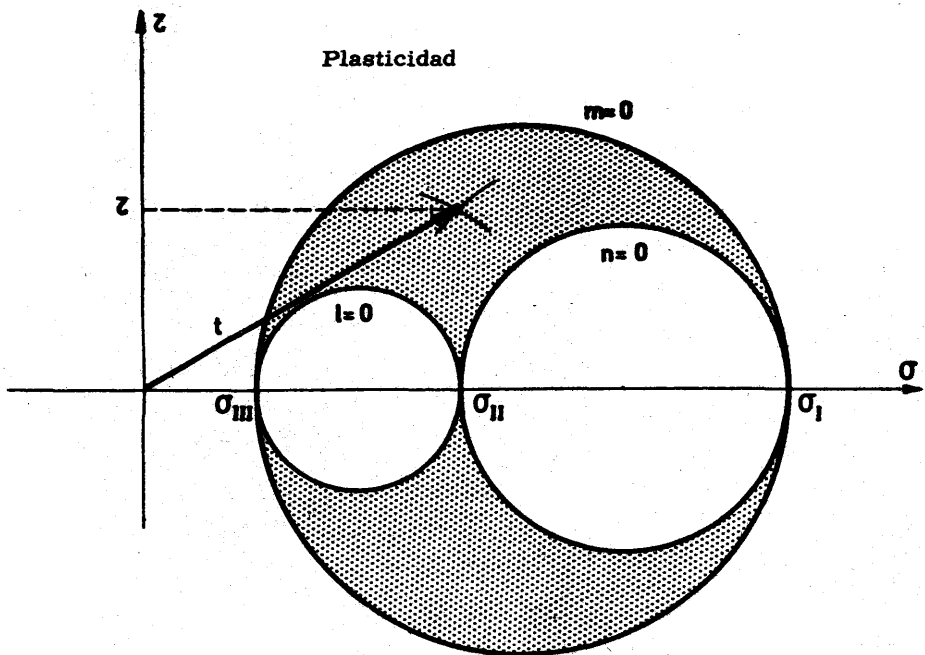
$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} = \sigma_I \sin^2 \alpha + \sigma_{II} \cos^2 \alpha = \sigma_I \sin^2 \alpha + \sigma_{II} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} (\sigma_I \sin^2 \alpha - \sigma_{II} \sin^2 \alpha) + \\ \quad + \frac{1}{2} (\sigma_I \cos^2 \alpha - \sigma_{II} \cos^2 \alpha) = \\ \quad = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_{\alpha} = \sigma_I \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{II} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

Si dibujamos las expresiones en unos ejes (σ, τ) se observa que todos los puntos $(\sigma_{\alpha}; \tau_{\alpha})$ caen en un círculo de centro $(\sigma_I + \sigma_{II})/2$ y radio $(\sigma_I - \sigma_{II})/2$. Es el llamado de MOHR. Los valores positivos de σ siguen la normal exterior al elemento en estudio y los de τ giran según las agujas del reloj respecto al mismo.

Damos varios ejemplos de definición del círculo en los casos de actuación de

- tracción
- tensión tangencial
- tensión y compresión
- caso general

Una vez dibujado, el círculo de MOHR permite determinar las tensiones en cualquier punto buscando el ángulo doble en el centro. Se puede demostrar, sin embargo, la existencia de un punto singular o polo que reúne la propiedad de que toda recta trazada por él, corta al círculo en el punto representativo de la tensión sobre el plano paralelo a dicha dirección.



Circulo de Mohr

En el caso d) anterior el polo se obtiene trazando por ① una recta horizontal o por ② una recta vertical. Si ahora se desea saber las tensiones sobre el plano inclinado ③ trazaremos una paralela por P y obtendremos ③ en el círculo. σ negativa significa compresión y τ negativa giro contrario al reloj lo que nos permite dibujar inmediatamente la sollicitación pedida.

Obsérvese que la tensión tangencial máxima corresponde siempre al centro del círculo y su valor es la semisuma de las tensiones principales.

Si se desean hallar los planos principales basta unir P con σ_I y σ_{II} para tenerlos definidos. Ello permite construir inmediatamente la elipse de tensiones.

El tensor deformación admite un diagrama $(\epsilon; \frac{\gamma}{2})$ completamente análogo.

También se puede utilizar un diagrama $(I_x; I_{xy})$ para representar el tensor de inercia, lo que permite muy fácilmente obtener los ejes principales de una sección. I_x serían los momentos de inercia e I_{xy} los productos de inercia.

En el caso de 3 dimensiones también se puede conseguir una representación plana. Según sabemos la expresión de σ y τ en función de las tensiones principales es ($\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$)

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_I l^2 + \sigma_{II} m^2 + \sigma_{III} n^2 \\ \tau = \sqrt{(\sigma_I^2 l^2 + \sigma_{II}^2 m^2 + \sigma_{III}^2 n^2) - (\sigma_I l^2 + \sigma_{II} m^2 + \sigma_{III} n^2)^2} \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$

a) Eliminando l y n se obtiene

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right)^2 - m^2 (\sigma_I - \sigma_{II}) (\sigma_{II} - \sigma_{III})$$

que en el plano (σ, τ) es un círculo de centro

$$C \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}, 0 \right) \text{ y radio } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right)^2 - m (\sigma_I - \sigma_{II}) (\sigma_{II} - \sigma_{III})}$$

C es fijo pero R varía con m, siendo máximo (recuérdese $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$) para $m = 0$. Los puntos representativos son interiores al círculo

$$C \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}, 0 \right); R, \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

Círculo de Mohr

b) Si se eliminan l y m se obtiene

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{2}\right)^2 - n^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{II} - \sigma_I)$$

Las parejas (σ, τ) caen en un círculo de centro C $\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}, 0\right)$ y radio $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{2}\right)^2 - n^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{II} - \sigma_I)}$

Si $n = 0$, como $\sigma_{II} - \sigma_I$ es negativo siempre, se obtiene un círculo mínimo. Los puntos representativos son exteriores al círculo $C\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}, 0\right); R = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$

c) Si se eliminan m y n

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{2}\right)^2 - l^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{II} - \sigma_I)$$

Las parejas representativas caen en un círculo

$$C\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}, 0\right); R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{2}\right)^2 - l^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{II} - \sigma_I)}$$

siendo todos exteriores al círculo $C\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}, 0\right); R = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$

En definitiva se debe cumplir simultáneamente

$$\begin{cases} \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{2}\right)^2 - m^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{II} - \sigma_I) \leq 0 \\ \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{2}\right)^2 - n^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{II} - \sigma_I) \geq 0 \\ \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{2}\right)^2 - l^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{II} - \sigma_I) \geq 0 \end{cases}$$

Dibujando los círculos se observa que cualquier punto debe caer en la zona punteada. Si se establece una red acotada de círculos n, m, l, se pueden encontrar rápidamente los valores τ y σ .

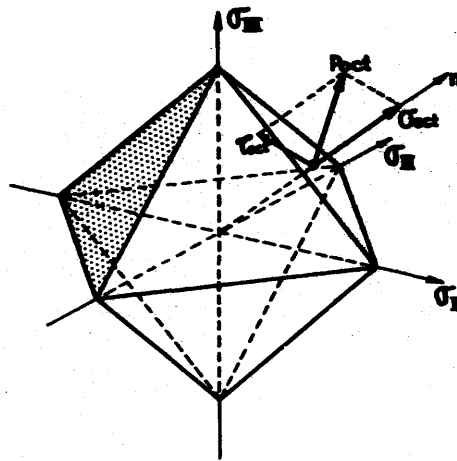
También se puede ver que los primeros miembros de las ecuaciones anteriores representan las potencias del punto A respecto a las tres circunferencias.

$$\text{Si } \begin{cases} l = \cos \alpha \\ m = \cos \beta \\ n = \cos \gamma \end{cases}$$

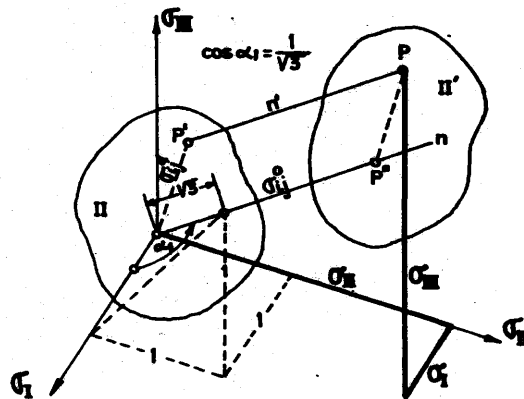
Circulo de Mohr

Llevando α y γ como se indica y trazando los círculos de radios $\overline{O_1 P_1}$ y $\overline{O_2 P_2}$ se obtiene el punto representativo. Obsérvese que $\epsilon_{m\acute{a}x} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ y que en el caso de solicitación hidrostática el círculo se reduce a un punto.

Circulo de Mohr



TETRAEDRO ELEMENTAL



REPRESENTACION DE LAS COMPONENTES ESFERICA Y DESVIADORA

APENDICE 2

TENSORES DESVIADOR Y ESFERICO

Supongamos la cara de un octaedro elemental orientado respecto a las tensiones principales

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Las componentes de la tensión son

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Proyectando sobre la normal tendremos

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_I l + \sigma_{II} m + \sigma_{III} n) = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} = \frac{I_1}{3}$$

Siendo $I = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$ el primer invariante del tensor tensión.

Como la tensión total es

$$t = \sqrt{\frac{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2}{3}}$$

la tensión tangencial octaédrica tiene por expresión

$$\tau^2 = t^2 - \sigma^2$$

Como el segundo invariante es $I_2 = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III}$

$$3t^2 = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2$$

$$I_1^2 = (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2 = 3t^2 + 2I_2$$

$$t^2 = \frac{I_1^2}{3} - \frac{2}{3} I_2 \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{1}{3} \frac{I_1^2}{3} \quad ; \quad t^2 - \sigma^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{I_1^2}{3} - I_2 \right)$$

y por tanto

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{I_1^2}{3} - I_2}$$

Tensores desviador y esférico

Es decir, las tensiones octaédricas son en función de los invariantes.

Cualquier tensor puede ser puesto como suma de una componente esférica o isotrópica σ_{ij}^o y otra distorsional o desviadora σ_{ij}^d .

La componente esférica es $\sigma_{ij}^o = \sigma_{oct} \cdot \delta_{ij} = \sigma_{oct} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que representa una presión hidrostática.

La componente desviadora es $\sigma_{ij}^d = \begin{pmatrix} (\sigma_I - \sigma_{oct}) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{II} - \sigma_{oct}) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{III} - \sigma_{oct}) \end{pmatrix}$

El lector puede comprobar fácilmente que

$$\begin{cases} \sigma_{oct}^o = \sigma_{oct}; \tau_{oct}^o = 0 \\ \sigma_{oct}^d = 0; \tau_{oct}^d = \tau_{oct} \end{cases}$$

Para comprender más gráficamente el significado del tensor isotrópico y del desviador, imaginemos de nuevo el sistema de ejes $(\sigma_I; \sigma_{II}; \sigma_{III})$. La recta $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{\sigma_{oct}}{3}$ es la normal octaédrica.

El plano normal a ella por el origen $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0$ es tal que todos sus puntos representan estados de tensión con el tensor isotrópico nulo y por tanto estados de distorsión pura. Los planos paralelos $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = C$ son los de estados con el tensor isotrópico constante

$$\sigma_{oct} = C/3$$

Por otra lado las rectas paralelas a $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ son del tipo

$$\sigma_I - C_1 = \sigma_{II} - C_2 = \sigma_{III} - C_3$$

Así pues

$$\begin{cases} \sigma_I = C_1 + k \\ \sigma_{II} = C_2 + k \\ \sigma_{III} = C_3 + k \end{cases} \quad \sigma_{oct} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3} + k$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_I - \sigma_{oct} &= \frac{2}{3} C_1 - \frac{C_2 + C_3}{3} \\ \sigma_{II} - \sigma_{oct} &= \frac{2}{3} C_2 - \frac{C_3 - C_1}{3} \\ \sigma_{III} - \sigma_{oct} &= \frac{2}{3} C_3 - \frac{C_1 - C_2}{3} \end{aligned}$$

Tensores desviador y esférico

Por lo tanto, el desviador, para todos los estados de cada recta es constante

$$\sigma_{ij}^d = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2C_1 - C_2 - C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2C_2 - C_3 - C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2C_3 - C_1 - C_2 \end{pmatrix}$$

Sentado ésto cabe pensar en la siguiente construcción. Por el origen trazamos la recta y el plano octaédrico y por el punto representativo del estado de estudio una recta paralela a aquélla. P' es un estado de distorsión pura, justamente la componente σ_{ij}^d .

La paralela por P a OP' determina el punto P" que representa la componente isótropa σ_{ij}^o , ya que PP" está en un plano paralelo al octaédrico.

Con el tensor de deformación $\left(\begin{matrix} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \dots & \dots \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \dots & \dots \end{matrix} \right)$

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

se define igualmente una componente isótropa ϵ_{ij}^o y otra desviadora ϵ_{ij}^d .

$$\epsilon_{ij}^o = \epsilon_{oct} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \epsilon_{ij}^d = \begin{pmatrix} \epsilon_x - \epsilon_{oct} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y - \epsilon_{oct} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z - \epsilon_{oct} \end{pmatrix}$$

donde, en función de los invariantes

$$\epsilon_{oct} = \frac{J_1}{3} \quad ; \quad \gamma_{oct} = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{J_1^2}{3} - J_2}$$

$$J_1 = \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III} \quad ; \quad J_2 = \epsilon_I \epsilon_{II} + \epsilon_I \epsilon_{III} + \epsilon_{II} \epsilon_{III}$$

APENDICE 3

ENERGIA ELASTICA

Por definición, se llama energía elástica a

$$U = \frac{1}{2} \sigma_I \epsilon_I + \frac{1}{2} \sigma_{II} \epsilon_{II} + \frac{1}{2} \sigma_{III} \epsilon_{III}$$

Utilizando la ley de HOOKE generalizada

$$\epsilon_i = \frac{1}{E} [\sigma_i - \nu (\sigma_j + \sigma_k)]$$

se obtiene

$$U = \frac{1}{2E} [(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - 2\nu (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III})]$$

Si se aplica la expresión anterior a la componente esférica del tensor

$$U^o = \frac{1}{2E} [3\sigma_{oct}^2 - 6\nu \sigma_{oct}^2] = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_{oct}^2 = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2$$

que representa la energía almacenada durante el cambio de volumen.

Al estudiar la energía del desviador

$$U^d = \frac{1}{2E} [\epsilon \sigma_i^2 - 3\sigma_{oct}^2 - 2\nu (\frac{1}{2} \epsilon \sigma_i \sigma_j - 3\sigma_{oct}^2)] = \frac{1}{2E} [\epsilon \sigma_i^2 - \nu \epsilon \sigma_i \sigma_j - 3\sigma_{oct}^2 + 6\nu \sigma_{oct}^2] = \frac{1}{2E} \frac{2(1+\nu)}{3} [\epsilon \sigma_i^2 - \frac{1}{2} \epsilon \sigma_i \sigma_j]$$

o lo que es igual

$$U^d = \frac{1}{12G} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_I)^2 + (\sigma_{II} - \sigma_I)^2]$$

que es la energía almacenada durante la distorsión.

Si el estado de tensiones viene dado por $(\sigma_i;)$ tendremos

$$U = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{2E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G}$$

APENDICE 4

VISCOSIDAD

Cuando un sólido se encuentra sometido a tensiones tangenciales la resistencia depende del módulo G de rigidez. En los fluidos la propiedad correspondiente es la viscosidad dinámica.

Imaginemos dos cilindros coaxiales de radios vecinos entre los que se vierte un líquido viscoso.

El interior está suspendido de un hilo de torsión y el inferior puede girar libremente. Si se mide el momento de torsión en relación con la velocidad angular aplicada y se llevan a un gráfico ($M_t; \omega$) los resultados, se obtiene una recta, es decir, la viscosidad es independiente del grado de esfuerzo cortante.

Si se observa en una sección del viscosímetro la distribución de velocidades, la distorsión de un elemento será

$$d\alpha = \frac{dl}{ds}$$

pero $dl = dv \cdot dt$ (dv es la variación de velocidad en ds), luego

$$d\alpha = \frac{dv}{ds} dt$$

La viscosidad dinámica η se define como la constante de proporcionalidad entre el esfuerzo tangencial y la velocidad de variación de α , es decir

$$\tau = \eta \frac{dv}{ds}$$

sus dimensiones son $[\eta] = [M L^{-1} T^{-1}]$ y la unidad cgs ó poise (del francés POISEVILLE) es dina.seg/cm².

Viscosidad

Sean, por ejemplo, cilindros de 25 cm. de altura y diámetros 15 y 15'05 cm. Cuando el cilindro exterior gira a 90 rpm, se observa que el momento de torsión en el cilindro interior es 0,10 m Kg.

La velocidad tangencial del cilindro exterior es

$$V = r\omega = \frac{15'05}{2} \frac{2\pi \cdot 90}{60} = 70'9 \text{ cm. seg}^{-1}$$

Si se aproxima la variación de velocidades por una recta

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{\Delta r} = \frac{70'9}{7'525 - 7'5} = 2.836 \text{ seg}^{-1}$$

$$\text{Como } M_t = \tau \cdot S_{\text{cilindro}} \cdot r; \tau = \frac{0'10}{0'075 \pi \cdot 0'15 \cdot 0'25} =$$

$$M_t = 11'11 \text{ Kg/m}^2$$

y la viscosidad del líquido ensayado

$$\eta = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}} = \frac{11'11}{2836} = 3'9 \cdot 10^{-3} \text{ Kg. seg/m}^2$$

Llamando $\dot{u} = \frac{du}{dt}$, $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$, $\dot{w} = \frac{dw}{dt}$ a las componentes

de la velocidad, la generalización al movimiento tridimensional es inmediata

$$\frac{d\alpha_{xy}}{dt} = 2\eta_{xy} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \alpha_{xz}}{\partial t} = 2\eta_{xz} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \alpha_{yz}}{\partial t} = 2\eta_{yz} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}$$

por lo que escribiremos

$$\begin{cases} \tau_{yx} = \tau_{xy} = \eta \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} = \eta \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right) \end{cases}$$

Viscosidad

Si se supone un fluido incompresible

$$0 = \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{y por tanto}$$

$$0 = \dot{\theta} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \quad \text{es decir } \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{ecuación de continuidad}).$$

Para deducir las tensiones normales se emplea el siguiente artificio: Imaginemos un sólido con la misma forma del fluido en el instante t ; si los corrimientos en $t + dt$ son

$$u^* = \dot{u} dt$$

$$v^* = \dot{v} dt$$

$$w^* = \dot{w} dt$$

$$\zeta = \frac{\eta}{dt}$$

las tensiones tangenciales son

$$\tau_{xy}^* = \zeta \gamma_{xy}^*$$

$$\tau_{yz}^* = \zeta \gamma_{yz}^*$$

$$\tau_{zx}^* = \zeta \gamma_{zx}^*$$

que al desarrollar

$$\tau_{xy}^* = \zeta \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) = \frac{\eta}{dt} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) dt = \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

resultan ser análogas a las existentes en el fluido.

(I) Si sumamos al fluido el sólido cambiado de signo desaparecen las tensiones tangenciales y resulta un estado hidrostático.

(II) Por ello el estado de tensiones del fluido se obtiene añadiendo al estado del sólido una presión hidrostática.

Según las fórmulas de LAME, el estado del sólido es

$$\sigma_x^* = \lambda \theta^* + 2\zeta \epsilon_x^*$$

pero si $\dot{\theta} = 0$, como $\theta^* = dt \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) = 0$

$$\sigma_x^* = 2\zeta \frac{\partial u^*}{\partial x} = 2\zeta \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dt = 2\eta \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$$

Viscosidad

De acuerdo con (I) y (II) resulta, pues, que en el fluido las tensiones normales son

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -p + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y = -p + 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z = -p + 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right. \quad \gamma = - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

Ahora ya podemos expresar el equilibrio de la partícula. La primera condición es, según sabemos

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Siendo X las componentes de las fuerzas de volumen y aceleración. Al sustituir valores queda

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 u + \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + X = 0$$

que, al ser incompresible queda

$$X - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 u = 0$$

y en forma vectorial

$$\boxed{\bar{F} - \bar{\nabla} p + \eta \nabla^2 \bar{V} = 0}$$

que es la

ecuación de NAVIER-STOKES.

Viscosidad

Si no existen fuerzas de masa ni aceleración, las ecuaciones de NAVIER-STOKES son

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \nabla^2 \dot{u} &= 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} + \eta \nabla^2 \dot{v} &= 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \nabla^2 \dot{w} &= 0 \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} P &= -\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \\ \text{Si llamamos } n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} &= -\eta \nabla^2 \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} &= -\eta \nabla^2 \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} &= -\eta \nabla^2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Sumando

$$\boxed{\nabla^2 n = -\eta \nabla^2 \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) = 0}$$

n es pues función armónica.

Como

$$dn = \frac{\partial n}{\partial x} dx + \frac{\partial n}{\partial y} dy + \frac{\partial n}{\partial z} dz = -\eta (\nabla^2 \dot{u} dx + \nabla^2 \dot{v} dy + \nabla^2 \dot{w} dz)$$

Para que sea diferencial exacta $\frac{\partial(\nabla^2 \dot{u})}{\partial y} = \frac{\partial(\nabla^2 \dot{v})}{\partial x}$; etc

lo que es equivalente a

$$0 = \frac{\partial(\nabla^2 \dot{u})}{\partial y} - \frac{\partial(\nabla^2 \dot{v})}{\partial x} = \nabla^2 \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) \dots etc$$

Es decir si $\text{rot } \vec{V} = R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} + R_3 \vec{k}$

Se debe cumplir

$$\boxed{\nabla^2 R_1 = \nabla^2 R_2 = \nabla^2 R_3 = 0}$$

Viscosidad

Si $\text{rot } \vec{V} = 0$, obtenemos $\vec{V} = \text{grad } u$ y como $\text{div } \vec{V} = 0$ por continuidad, $\text{div grad } u = 0$ siendo u una función potencial.

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\eta r^2 \ddot{u}_x = -\eta r^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\eta r^2 \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\eta r^2 \frac{\partial u}{\partial z}$$

y entonces

$$\sigma_x = n + 2\eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\sigma_y = n + 2\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\sigma_z = n + 2\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\tau_{xy} = 2\eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\tau_{xz} = 2\eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$$

$$\tau_{yz} = 2\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$$

APENDICE 5

TRANSFORMADA DE CARSON-LAPLACE

Dada una función $f(x)$ definida para $x \geq 0$, se llama su transformada $F(p)$ de CARSON-LAPLACE a

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx$$

escribiéndose

$$F(p) = L[f(x)] ; \quad f(x) = L^{-1}[F(p)]$$

Las siguientes propiedades se deducen inmediatamente a partir de la definición

$$\begin{aligned} - L[k_1 f_1 + k_2 f_2] &= k_1 L[f_1] + k_2 L[f_2] ; f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} F(p) \\ - L[f'(x)] &= p L[f(x)] - p f(0) \\ - L[f''(x)] &= p^2 L[f(x)] - p^2 f(0) - p f'(0) - \dots - p f^{(n-1)}(0) \\ - \frac{d^n}{dp^n} \left[\frac{1}{p} L[f(x)] \right] &= \frac{(-1)^n}{p} L[x^n f(x)] \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Algunas transformadas usuales se incluyen en la tabla adjunta.

La función origen de una determinada transformada se obtiene descomponiéndola en sumandos cuyas funciones origen se encuentran en la tabla.

1) Las funciones de HEAVISIDE y DIRAC. Fórmula de desplazamiento.

Según es sabido la función de HEAVISIDE, se define así

$$\begin{aligned} h(x-a) &= 0 & \text{si} & \quad x < a \\ h(x-a) &= 1 & \text{si} & \quad x \geq a \end{aligned}$$

Si se quiere trasladar una $f(x)$ paralelamente al eje $0x$, es evidente que su expresión será

$$\varphi(x) = h(x-a) \cdot f(x-a)$$

Transformada de Carson-Laplace

Su transformada es

$$L[\varphi(x)] = p \int_0^{\infty} e^{-p(u+a)} \cdot f(u) du = e^{-pa} L[f(x)] \quad (x-a=u)$$

Es decir para hallar la transformada de la curva trasladada se multiplica por e^{-pa} la transformada de la curva original $f(x)$.

Es la llamada fórmula de desplazamiento

$$L[h(x-a) \cdot f(x-a)] = e^{-pa} \cdot L[f(x)]$$

La función δ de DIRAC es

$$\begin{cases} \delta(x-a)=0 & x < a \\ \delta(x-a)=1/\epsilon & a < x < a+\epsilon \quad (\epsilon \rightarrow 0) \\ \delta(x-a)=0 & x > a+\epsilon \end{cases}$$

con la condición $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{a+\epsilon} \delta(x-a) dx = 1$

Se puede comprobar que

$$L[\delta(x-a)] = e^{-pa}$$

2) El teorema de convolución o teorema de BOREL.

Sean $\begin{cases} F(p) = L[f(x)] \\ G(p) = L[g(x)] \end{cases}$ Se desea obtener $L^{-1}\left[\frac{F(p) \cdot G(p)}{p}\right]$

Teniendo en cuenta la definición de L, es evidente que

$$\frac{1}{p} F(p) G(p) = \int_0^{\infty} e^{-py} \cdot F(p) \cdot g(y) dy$$

pues $F(p)$ es independiente de la variable y de integración.

Transformada de Carson-Laplace

Si se aplica la fórmula de desplazamiento

$$e^{-py} \cdot F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} \cdot h(x-y) \cdot f(x-y) dx$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{p} F(p) \cdot G(p) = p \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-px} \cdot g(y) \cdot f(x-y) \cdot h(x-y) dy dx$$

Si $x < y$, $h(x-y) = 0$

Si $x \geq y$, $h(x-y) = 1$ } por lo que

$$\frac{1}{p} F(p) G(p) = p \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} e^{-px} \cdot g(y) \cdot f(x-y) dx dy$$

El dominio de integración es el primer octante, y la operación se realiza mediante fajas horizontales.

Si se invierte el orden y se utilizan fajas verticales

$$\frac{1}{p} F(p) G(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} dx \int_0^x g(y) \cdot f(x-y) dy$$

tendremos

$$\frac{1}{p} F(p) G(p) = L \left[\int_0^x g(y) \cdot f(x-y) dy \right]$$

o lo que es igual

$$\boxed{L^{-1} \left[\frac{F(p) G(p)}{p} \right] = \int_0^x g(y) \cdot f(x-y) dy}$$

teorema de convolución.

3) Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

Gracias a las transformaciones de las derivadas, las ecuaciones se transforman en otras algébricas que se pueden resolver fácilmente.

Si sobre la solución se deshace el cambio se obtiene la solución general.

Transformada de Carson-Laplace

Ejemplo 1

Sea $y'' + y' = \sec x$; $L(y'') + L(y') = L(\sec x) = \frac{p}{p^2+1}$

$$L y'' + L y' = L(y) [p^2 + p] - y(0)(p^2 + p) - y'(0)p$$

$$Y(p+1) - (p+1) - f(0) - f'(0) = \frac{1}{p^2+1}$$

$$Y = k_1 + \frac{k_2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p^2+1)} = k_1 + \frac{k_2}{p+1} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+1}$$

deshaciendo el cambio

$$y = k_1 + k_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sec x + \frac{1}{2} (1 - \cos x)$$

k_1 y k_2 se fijarán según las condiciones iniciales.

4) Ecuaciones lineales con coeficientes variables

En ocasiones la transformada de CARSON se utiliza con éxito en problemas del tipo

$$f_0(x) y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(x) y' + f_n(x) = \varphi(x)$$

sobre todo si f_k son algebraicas racionales enteras. La base es la transformación

$$\frac{d}{dp} \left[\frac{1}{p} L f \right] = - \frac{1}{p} L [x f]$$

Si

$$y = f(x)$$

$$Y = L[f(x)]$$

$$L[x \cdot y] = -p \frac{d}{dp} \left[\frac{1}{p} Y \right]$$

Ejemplo 2

Sea la ecuación de BESSEL

$$\begin{cases} x y'' + y' + x y = 0 \\ x=0 ; y'(0)=0 \end{cases}$$

$$L[x \cdot y''] + L[y'] + L[x \cdot y] = 0$$

Transformada de Carson-Laplace

$$\begin{cases} L[x y] = -\frac{dY}{dp} + \frac{Y}{p} ; & L[y'] = pY - p \\ L[y''] = p^2 Y - p^2 ; & L[x y''] = -p^2 Y' - pY + p \end{cases}$$

por lo que

$$[-p \frac{dY}{dp} - pY + p] + [pY - p] + [-Y' + \frac{Y}{p}] = 0$$

es decir $\frac{dY}{Y} = [\frac{1}{p} - \frac{p}{1+p^2}] dp$

$$Y = \frac{k p}{\sqrt{1+p^2}}$$

Si la condición de contorno es $y(0) = f(0) = 1$,
como $f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} F(p)$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} Y = 1 \rightarrow k = 1$$

$$Y = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

La transformada inversa se consigue desarrollando en potencias de $\frac{1}{p}$.

$$Y = (1 + \frac{1}{p^2})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \frac{1}{p^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \frac{1}{p^6} + \dots$$

y por tanto

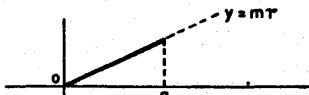
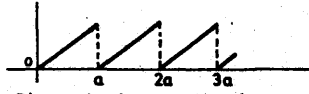
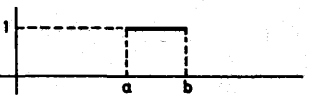
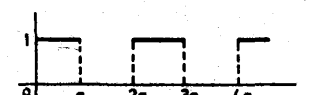
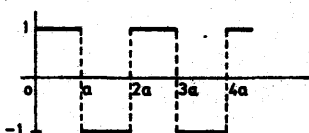

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

que es la función de BESSEL de primera especie y orden cero.

Transformada de Carson-Laplace

$L[f(x)]$	$f(x)$
C	C
p	$\delta(x)$ „ Función de Dirac
$\frac{\Gamma(n+1)}{p^n} = \frac{n!}{p^n}$	x^n „ ($n > 0$)
$\frac{p}{p-a}$	e^{ax}
$\frac{1}{p-a}$	$\frac{e^{ax} - 1}{a}$
$\frac{1}{p(p-a)}$	$\frac{e^{ax}}{a^2} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}$
$\frac{p}{(p-a)^2}$	$x \cdot e^{ax}$
$\frac{p}{p-a} \cdot \frac{1}{q}$	q^{ax} „ ($q > 1$)
$\frac{p \cdot b}{p^2 + b^2}$	$\sin bx$
$\frac{p^2}{p^2 + b^2}$	$\cos bx$
$\frac{p^2 + 2b^2}{p^2 + 4b^2}$	$\cos^2 bx$
$\frac{b^2}{p^2 + b^2}$	$1 - \cos bx$
$\frac{pb}{p^2 - b^2}$	$\text{Sh } bx$
$\frac{p^2}{p^2 - b^2}$	$\text{Ch } bx$
$\frac{b^2}{p^2 - b^2}$	$\text{Ch } bx - 1$
$\frac{p^2 - 2b^2}{p^2 - 4b^2}$	$\text{Ch}^2 bx$
$\frac{pb}{(p-a)^2 + b^2}$	$e^{ax} \cdot \sin bx$
$\frac{p(p-a)}{(p-a)^2 + b^2}$	$e^{ax} \cdot \cos bx$
$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{x}{2a} \cdot \sin ax$
$\frac{p(p^2 - a^2)}{(p^2 + a^2)^2}$	$x \cdot \cos ax$
$\frac{p}{p^4 + a^4}$	$\frac{1}{a^3 \sqrt{2}} \left[\text{Ch } \frac{a}{\sqrt{2}} x \cdot \sin \frac{a}{\sqrt{2}} x - \text{Sh } \frac{a}{\sqrt{2}} x \cdot \cos \frac{a}{\sqrt{2}} x \right]$

Transformada de Carson-Laplace

$L[f(x)]$	$f(x)$
$\frac{p^2}{p^4 + a^4}$	$\frac{1}{a^2} \cdot \text{sen} \frac{a}{\sqrt{2}} x \cdot \text{Sh} \frac{a}{\sqrt{2}} x$
$\frac{p^3}{p^4 + a^4}$	$\frac{1}{a\sqrt{2}} \left[\cos \frac{a}{\sqrt{2}} x \cdot \text{Sh} \frac{a}{\sqrt{2}} x + \text{sen} \frac{a}{\sqrt{2}} x \cdot \text{Ch} \frac{a}{\sqrt{2}} x \right]$
$\frac{p^4}{p^4 + a^4}$	$\cos \frac{a}{\sqrt{2}} x \cdot \text{Ch} \frac{a}{\sqrt{2}} x$
\sqrt{p}	$\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot x}}$
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$J_0(ax)$ Función de Bessel de la 1ª especie y orden cero (E.I.F. 5 y F.X)
$e^{-\frac{a}{p}}$	$J_0(2\sqrt{a \cdot x})$
$\frac{m}{p} (1 - e^{-\frac{a}{p}}) - ma \cdot e^{-\frac{a}{p}}$	
$\frac{m}{p} - \frac{ma}{2} (\text{Coth} \frac{ap}{2} - 1)$	 Diente de sierra de pendiente m
$e^{-ap} - e^{-bp}$	
$\frac{b}{1 + e^{ap}}$	
$b \cdot \text{Th} \frac{pa}{2}$	
$\frac{1}{2} (1 + \text{Coth} \frac{pa}{2})$	

APENDICE 6

TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Supongamos un sólido en equilibrio. Se cumplen las ecuaciones

$$\vec{D} = (x, y, z) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad ; \text{ etc } (3)$$

y las de contorno

$$\vec{F} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = \bar{x} \quad ; \dots \text{ etc } (3)$$

Imaginemos ahora un sistema de movimientos \vec{u} (u, v, w) de los puntos del sólido compatible con los enlaces al resto del universo. El trabajo de las fuerzas en equilibrio con los desplazamientos compatibles (independientes, por hipótesis, de aquéllas) es

$$T = \int_S \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS + \int_V \vec{D} \cdot \vec{u} \, dV$$

Como

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS &= \int_S (\bar{x}u + \bar{y}v + \bar{z}w) \, dS \\ &= \int_S [(\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w)l + (\tau_{xy} u + \sigma_y v + \tau_{yz} w)m + (\tau_{xz} u + \tau_{yz} v + \sigma_z w)n] \, dS \\ &= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} u + \sigma_y v + \tau_{yz} w) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} u + \tau_{yz} v + \sigma_z w) \right] dV \\ &= \int_V [-(Xu + Yv + Zw) + \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}] dV \\ \text{Y como } \int_V \vec{D} \cdot \vec{u} \, dV &= \int_V (Xu + Yv + Zw) dV \end{aligned}$$

se obtiene

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS + \int_V \vec{D} \cdot \vec{u} \, dV = \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV$$

que se suele enunciar diciendo

El trabajo del estado de sollicitación del cuerpo con unos corrimientos independientes, pero compatibles con los enlaces, es igual al trabajo de las tensiones con las deformaciones correspondientes a los corrimientos.

Teorema de los trabajos virtuales

El teorema de los trabajos virtuales se puede aplicar:

- 1) Con los estados reales de equilibrio y compa
tibilidad.
- 2) Con un estado de equilibrio falso y la defor
mación verdadera.
- 3) Con el estado de equilibrio real y una defor
mación falsa.
- 4) con ambos sistemas falsos.

Los casos más fructíferos son el 2) y el 3) que permiten transformar problemas de compatibilidad en problemas de equilibrio o viceversa.

BIBLIOGRAFIA

- 1.1. ALONSO MISOL: Cálculo operacional. E.T.S.I.C.C.P. 1960.
- 2.2.★ARRIAGA: Distorsiones en continuos viscoelásticos anisótropos múltiplemente conexos, con fenómenos de envejecimiento. TESIS. Fac. Ciencias. 1969
- 3.3. BATANERO: Estructuras metálicas E.T.S.I.C.C.P. 1956
4. BENITO: Cálculo plástico. Rev. Obras Púb. 1966.
5. BENHAM: Elementary machanic of solids. Pergamon 1965.
- 6.★BLAND: The theory of viscoelasticity. Oxf. Clarendon. 1960.
7. CALLADINE: On the derivation of yield conditions. Jour. Appl. Mech. Septiembre 72.
- 8.★COLONNETTI: L'Equilibre des corps déformables. Dunod 1955.
9. COURBON: Resistencia de materiales (2 tomos). Aguilar 1958.
10. CRANDALL-DAHL: Introducción a la mecánica de los sólidos. Castillo 1966.
- 11.★CRISTESCU: Dynamic plasticity. North Holland. 1967.
12. FERNANDEZ CASADO: Resistencia. Dossat. 1941
13. FORT: Cálculo de cimentaciones con consideración de los fenómenos viscoelastoplásticos en el terreno y en la estructura de cimentación. TESIS. E.T.S.I.C.C.P. 1968.
14. FREDRIKSON: Principles and applications of rheology. Prentice Hall. 1964.

15. GIULIANI: Comportamiento viscoelastoplástico de los materiales y sus efectos estáticos. IETCC. 1962.
16. GOGUEL: Traité de tectonique. Masson 1965.
- 17.★ GOGUEL: Introduction a l'etude mécanique des déformations de l'écorce terrestre. Mem. Cart. Géol. 1924.
18. GROSS: Mathematical structure of the theory of viscoelasticity. Paris 1953.
- 19.★ HILL: The mathematical theory of plasticity. Oxford. U.P. 1967.
20. JAEGER: Elasticity, fracture and flow with engineering application. Methuen and Co. 1956.
21. JAOUŁ: Etude de la plasticité et application aux métaux. Dunod. 1965.
22. LUJO SUKLJE: Rheological aspects of soil mechanics. Wiley. 1969.
- 23.★ MILLAN BARBANI: Introducción a la teoría matemática de la Plasticidad. Seminario de mat. aplicada. 1953.
24. MUZAS: Nociones de reología. Lab. Transp. y Mec. Sueño. 1964.
- 25.★ MUZAS: Deformaciones plastoelásticas en orificios circulares. M.O.P. 1965.
- 26.★ NADAI: Plasticity. McGraw Hill. 1931.
- 27.★ PRAGER: An introduction to plasticity. Adisson-1959.

28. ★ POPOFF-ILIOUCHINE: Deformations elastoplastiques.
Eyrolles. 1956.
29. ★ REINER: Twelve lectures on theoretical rheology.
North Holland. 1954.
30. SOKOLOVSKI: Statics of granular media. Pergamon 1965.
31. VELASCO: Plasticidad; una nueva teoría. ETSII. 1954.
32. ★ VOLTERRA: Sull'equilibrio dei corpi elastici più
volte connessi. Rend. R. Accad. Lincei.
1905.
33. WESTERGAARD: Theory of elasticity and plasticity.
Harvard Univ. P. 1952.
-

INDICE

CAPITULO 1. Consideraciones generales

1.1.	El ensayo de tracción	1
1.2.	Relajación y fluencia	9
1.3.	Criterios de resistencia equivalente	13
1.4.	Criterios fenomenológicos	21

CAPITULO 2. Ecuaciones reológicas

2.1.	La ecuación reológica de estado	26
2.2.	Modelos reológicos simples	27
2.3.	Modelos reológicos complejos	35
2.4.	Fenómenos de segundo orden	43

CAPITULO 3. Modelos reológicos lineales

3.1.	Definiciones	46
3.2.	Las funciones de relajación y fluencia Cuerpos generalizados	47
3.3.	La función memoria	49
3.4.	Transformación de modelos viscoelásticos en modelos elásticos	51
3.5.	La transformada del continuo viscoelástico isótropo	53

CAPITULO 4. Plasticidad

4.1.	Introducción	57
4.2.	El dominio de elasticidad	58
4.3.	La potencia de disipación específica y el teorema de Hill	59
4.4.	Las condiciones de Mises y Tresca	61
4.5.	Teoremas de acotación. Unicidad	64
4.6.	Equilibrio elastoplástico. Ecuaciones de Prandtl-Reuss	67
4.7.	El problema de la acritud. Endurecimientos isotrópico y cinemático	70

APENDICES

1.	Círculo de Mohr	75
2.	Tensores desviador y esférico	81
3.	Energía elástica	84
4.	Viscosidad	85
5.	Transformación de Carson-Laplace	91
6.	Teoremas de los trabajos virtuales	98